DS 3

Mercredi 4 octobre 2023 – durée 2h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 - Fonction hyperbolique

On rappelle que pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. **Formules d'addition**

   a) Montrer que $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$.
   b) Déterminer les formules d'addition de $\mathrm{sh}(x+y)$, $\mathrm{ch}(x-y)$ et $\mathrm{th}(x+y)$.

2. En déduire les **formules de duplication** : $\mathrm{ch}(2x)$, $\mathrm{sh}(2x)$ et $\mathrm{th}(2x)$.

3. Notant $t = \mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)$, exprimer $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{th}(x)$ en fonction de t.

4. Déterminer les formules de **transformation de produit en somme** : $\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y)$, $\mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$ et $\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$.

5. Soit $g : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \in \mathbb{R}^{[1,+\infty[}$.

   a) pour $x \in \mathbb{R}_+$, simplifier $g(\mathrm{ch}(x))$.
   b) pour $x \in \mathbb{R}_-$, simplifier $g(\mathrm{ch}(x))$.

6. Linéariser la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{ch}^3(x)\mathrm{sh}(2x)$ et en déduire une primitive de f.

Exercice 2 - Equations différentielles

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - 2ty = \sin(t) \exp\left(t^2\right)$$

2. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = \cos(t) + t\exp(2t)$$

Exercice 3 - Intégrale dépendant de ses bornes

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \ln(2)$.

1. On considère la fonction g définie par $g(t) = \dfrac{\sin(t) - t}{t^2}$ si $t \neq 0$ et $g(0) = 0$.

   a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $-\dfrac{|t|^3}{6} \leq \sin(t) - t \leq \dfrac{|t|^3}{6}$.
   Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t) - t}{t^2}$.

   b) En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}$.

   c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} g(t)\mathrm{d}t = 0$.

   d) En déduire que f est continue en 0.

2. Montrer à l'aide d'un changement de variable que f est paire.

3. a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

   b) Montrer que pour tout x réel non nul, on a : $f'(x) = \dfrac{\sin(x)\big(\cos(x) - 1\big)}{x^2}$.

   c) En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

   d) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

4. Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $|f(x)| \leq \dfrac{1}{2x}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

FIN DE L'ÉNONCÉ