Colle 6

Cette colle est l'occasion de revenir la colle précédente dans les exercices (primitive, calcul d'intégrale).
Les questions "★ " sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

Extrait du programme

1. Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

B. Primitives et équations différentielles linéaires

b. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Équation différentielle linéaire du premier ordre : $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	

c. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \longmapsto A\exp(\lambda x)$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \longmapsto B\cos(\omega x)$ et $x \longmapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

Méthodes et savoir-faire

- Mettre en place la structure de l'ensemble solution et le principe de superposition
- Mettre en place la méthode de variation de la constante pour une EDL d'ordre 1
- Chercher une solution particulière d'une EDL lorsque le second membre est du type polynomial-exponentiel et/ou trigonométrique.

Questions de cours

➜ Dans le cadre des équations différentielles linéaires, présenter les notions de : linéarité, équation homogène, structure de l'ensemble des solutions, principe de superposition.

★ Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène d'une EDL d'ordre 1.
Traiter le cas de $(1+x^2)y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

★ Présenter la méthode de variation de la constante pour une EDL d'ordre 1 afin d'en trouver une solution particulière.
Traiter la cas $\sin(x)y' - \cos(x)y + 1 = 0$ sur $]0, \pi[$.

★ Présenter la méthode de recherche d'une solution particulière d'une EDL d'ordre 1 lorsque a est constant et b est un produit d'une fonction polynomiale et d'une exponentielle.
Traiter le cas d'ordre 1 suivant : $y'' - y = \cos(x) + xe^x + x^2$.

★ Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène d'une EDL d'ordre 2 à coefficients constants complexes, puis à coefficients réels.
Traiter un exemple simple pour chacune des cinq situations possibles.

★ Présenter la méthode de recherche d'une solution particulière d'une EDL d'ordre 2 à coefficients constants et ayant pour second membre $Ae^{\lambda x}$.
Décliner le résultat précédent pour résoudre : $y'' - 4y' + y = \cos(2x)$.

★ Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas d'une EDL d'ordre 1.

★ Résolution de l'équation homogène d'une EDL d'ordre 2 à coefficients constants complexes.

★ Présenter la méthode de recherche d'une solution particulière d'une EDL d'ordre 2 à coefficients constants et ayant pour second membre $P(x)e^{\lambda x}$.
Décliner le résultat précédent pour résoudre : $y'' + 9y = x\cos(3x)$.