# DM 5

à rendre le lundi 13 novembre 2023

## Fonctions indicatrices

Prog

**Remarque :** On note que pour tout $A \subset E$, $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A^2$.
**Remarque :** Si $E$ est fini, alors pour toute partie $A$ de $E$, on appelle cardinal de $A$, noté $\mathrm{Card}(A)$, le nombre d'éléments de $A$. En particulier, il vient :

$$\mathrm{Card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

### Partie A - Indicatrices et opérations ensemblistes

**Objectif :** Utiliser les propriétés de l'indicatrice pour déterminer des propriétés ensemblistes

1. Soit $A, B, C$ des parties de $E$.

- Exprimer $\mathbb{1}_{A \backslash (B \cup C)}$ et $\mathbb{1}_{(A \backslash B) \cap (A \backslash C)}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$.
- En déduire que $\mathbb{1}_{A \backslash (B \cup C)} = \mathbb{1}_{(A \backslash B) \cap (A \backslash C)}$ et donc que $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.
- Procéder de même pour établir $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$ et $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$

On calculera l'indicatrice de chacun des ensembles et on utilisera le résultat de la remarque.

2. Utilisant les indicatrices, démontrer les règles de de Morgan pour $A, B$ deux parties de $E$ :

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

3. De même, démontrer les règles de distributivités pour $A, B, C$ trois parties de $E$ :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. La **différence symétrique** de $A$ et $B$, deux parties de $E$, est définie par :

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$

a) Montrer que : $\mathbb{1}_{A \Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$
b) Montrer que : $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$
c) Pour $A, B, C$ des parties de $E$, montrer que : $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

5. Caractériser les relations suivantes à l'aide des indicatrices de $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ :

$$A \subset B \qquad A \cap B = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup B \cup C = E$$

6. Pour $A, B \subset E$, identifier les ensembles associés aux indicatrices suivantes :

$$\mathbb{1}_C = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_D = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$$

### Partie B - Indicatrices et cardinalité

**Objectif :** Utiliser les propriétés de l'indicatrice pour déterminer des cardinaux

Dans cette partie, $E$ est un ensemble de cardinal fini, $n \in \mathbb{N}$.

7. Soit $C = \{(A,B); A \subset B \subset E\}$.

a) Approche 1 : Montrer que $(A,B) \mapsto \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ est une bijection de $C$ vers $\mathcal{F}(E,\{0,1,2\})$. En déduire le cardinal de $C$.

b) Approche 2 : Compléter et expliquer les étapes du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(C) &= \sum_{A\subset B\subset E} 1 \\
&\quad \text{choix de } A \text{ puis de } B\backslash A \\
&= \sum_{A\subset E} \ \sum_{(B\backslash A)\subset(E\backslash A)} 1 \\
&\quad \text{discussion suivant le cardinal de } A :\ k = \mathrm{Card}(A) \\
&= \sum_{k=?}^{?} \ \sum_{\substack{A\subset E\\ \mathrm{Card}(A)=k}} \ \sum_{(B\backslash A)\subset(E\backslash A)} 1 \\
&\quad \dots \\
&= \sum_{k=?}^{?} \ \sum_{\substack{A\subset E\\ \mathrm{Card}(A)=k}} 2^{n-k} \\
&\quad \text{le nombre de façons de choisir une partie de } k \text{ élement dans } E \text{ est : } \dots \\
&= \dots \\
&\quad \text{formule du binôme} \\
&= (2+1)^n
\end{aligned}$$

8. Dans le cas particulier où $E = \{1,2,3\}$, expliciter et déterminer $S_1 = \sum_{A\subset E} \mathrm{Card}(A)$.

9. Compléter la démarche suivante permettant le calcul de $S_1 = \sum_{A\subset E} \mathrm{Card}(A)$ (cas général)

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{A\subset E}\sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x) \\
&\quad \text{on permute les deux sommes} \\
&= \dots \\
&\quad \dots \\
&= \sum_{x\in E} \mathrm{Card}\Big(\mathcal{P}(E\backslash\{x\})\Big) \\
&\quad \dots \\
&= \sum_{x\in E} 2^{n-1} = \dots
\end{aligned}$$

10. Dans le cas particulier où $E = \{1,2\}$, expliciter et déterminer $S_2 = \sum_{A,B\subset E} \mathrm{Card}(A\cap B)$.

11. De même, calculer $S_2 = \sum_{A,B\subset E} \mathrm{Card}(A\cap B)$ (cas général).

12. De même, calculer $S_3 = \sum_{A,B\subset E} \mathrm{Card}(A\cup B)$