

DM 6

à rendre le lundi 20 novembre 2023

On considère $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On définit également trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) par leurs premiers termes $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 4u_n - 3v_n - 2w_n + 1 \\ v_{n+1} &= 2u_n - v_n - 2w_n + 2 \\ w_{n+1} &= -u_n + v_n + 3w_n - 3 \end{cases}$$

1. Puissances successives de la matrice A

a) Calculer $(A - I)(A - 2I)(A - 3I)$ où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

c) Vérifier que la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ satisfait la relation $AP = PD$ et en déduire

l'expression de A en fonction des matrices P , D et P^{-1} .

d) Exprimer A^n en fonction de P , P^{-1} et D^n pour $n \in \mathbb{N}$ et prouver la relation.

e) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Obtention de l'expression des termes des trois suites récurrentes

a) Vérifier que l'on a la relation : $C = AC + B$.

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C - A^n C$.

d) En déduire les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.