Colle 7

Les questions "★ " sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

Extrait du programme

1. Raisonnement et vocabulaire ensembliste

b. Ensembles

Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathcal{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition.	

c. Applications et relations

Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.
Relation binaire sur un ensemble	
Relation d'équivalence, classes d'équivalence.	La notion d'ensemble quotient est hors programme. Les classe d'équivalence forment une partition de l'ensemble sous-jacent. Congruences dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Z}$. Notation $a \equiv b\ [c]$.
Relation d'ordre. Ordre partiel, total.	

2. Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

a. Sommes et produits

Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.

Méthodes et savoir-faire

- Utiliser les opérations sur les ensembles ; en particulier : la règle de de Morgan et la distributivité.
- Étudier la bijectivité d'une application par la résolution de l'équation $f(x) = y$.
- Permuter des sommes (dans le cas d'une somme double)

Questions de cours

➜ Opérations sur les ensembles (complémentaire, $\cap$, $\cup$, $A \backslash B$, de Morgan, distributivité)

➜ Définir le produit cartésien, introduire la notion de somme double. Présenter les deux situations de permutation des sommes et donner des exemples judicieux. Résultat sur le produit de deux sommes finis.

➜ Application, image directe et image réciproque. Donner des exemples.

★ Fonction indicatrice d'une partie $\mathbb{1}_A$. Propriétés. Déterminer $\mathbb{1}_{\overline{A}}$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\cup B}$, $\mathbb{1}_{A\backslash B}$.

➜ Définir les notions d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité. Caractérisation de la bijectivité.

★ Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que :

(i) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.

(ii) $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.

★ Exercice - Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

➜ Relation binaire, réflexive, symétrique, transitive, antisymétrique, relation d'équivalence, classes d'équivalences, relation d'ordre. Donner des exemples.