

DM 8

à rendre le lundi 4 décembre 2023

Comportement asymptotique d'une suite définie implicitement

Pour tout $x > 0$, on pose :

$$f(x) = x + \ln(x)$$

1. a) Montrer que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et donner ses limites en 0 et en $+\infty$.
- b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in]0, +\infty[$ tel que :

$$u_n + \ln(u_n) = n.$$

2. a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b) Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

3. a) Montrer que $u_n \sim n$.

b) Montrer que $\ln(u_n) \sim \ln(n)$ et en déduire que $u_n - n \sim -\ln(n)$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - n + \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n}\right)$ et en déduire que :

$$u_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$