DS 5

Mercredi 29 novembre 2023 – durée : 2 h

Exercice 1 - Décomposition de Dunford

On dit qu'une matrice A carrée d'ordre n est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que :

$$A^{k-1} \neq 0_n \quad \text{et} \quad A^k = 0_n$$

où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n.

Soit A une matrice carrée d'ordre n, on dit que le couple (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est un matrice diagonalisable} \\ \qquad \text{i.e. il existe une matrice } P \text{ telle que } P^{-1}\Delta P \text{ est diagonale} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \qquad \text{i.e. il existe } p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } N^p \text{ est la matrice nulle} \\ \Delta N = N\Delta \ \text{ et } \ A = \Delta + N \end{cases}$$

1. On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On considère les matrices

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Exprimer les produits ΔX_1, ΔX_2 et ΔX_3 en fonction de X_1, X_2, X_3

   b) Déterminer si P est inversible et donner son inverse éventuelle.

   c) Calculer, puis identifier $P^{-1}\Delta P$.

3. a) Établir que N est une matrice nilpotente.

   b) Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.

   c) En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner l'expression de A^n en fonction des puissances de Δ, de N et de n.

   d) Établir que pour tout entier naturel $k \geq 1$, $\quad \Delta^k N = N$

   e) Proposer une décomposition de Dunford de A^n.

Problème 2 - Étude d'une suite récurrente

Dans tout le problème, on considère la fonction réelle f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Partie A – Étude du sens de variation de la fonction f

1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $]0,+\infty[$. En déduire le sens de variation de f sur $]0,+\infty[$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. En admettant que $0.7 < f(0.9) < f(0.7) < 0.9$, montrer que, pour tout x élément de l'intervalle $I = [0.7\ ,\ 0.9]$, $f(x)$ est aussi élément de I et que $|f'(x)| \leq 0.9$.

Partie B – Équation f(x)=x

On se propose dans cette partie de montrer que l'équation d'inconnue $x > 0$: $f(x) = x$ a une solution unique dans l'intervalle $]0,+\infty[$ et de donner une valeur approchée de cette solution à l'aide d'une suite.

5. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x$$

Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en 0.

6. Montrer que g est une fonction strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
7. Montrer que l'équation d'inconnue x : $g(x) = 0$ admet une solution unique, que l'on notera α, appartenant à l'intervalle $I = [0.7\ ,\ 0.9]$. Montrer que cette équation n'a pas d'autre solution dans $]0,+\infty[$.
8. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} & u_0 = 0.7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est élément de I.

9. Démontrer que pour tout entier n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.9\,|u_n - \alpha|$$

10. Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier n :

$$|u_n - \alpha| \leq 0.9^n\,|u_0 - \alpha|$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

11. Montrer que si $x < \alpha$ alors $f(x) > \alpha$ et que si $x > \alpha$ alors $f(x) < \alpha$. En déduire que, pour tout entier naturel n pair, $u_n < \alpha$ et que pour tout entier naturel n impair, $u_n > \alpha$.

12. Le calcul des termes successifs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne :

$$\begin{cases} u_7 \simeq 0.843719674807030 \\ u_8 \simeq 0.781720071819179 \end{cases}$$

Quel encadrement en déduit-on pour α ? Quel est l'ordre de grandeur de la précision ?

13. On souhaite calculer α avec une précision inférieure à 10^{-10}.
Sachant que $0.9^{22} \simeq 0,0984\cdots < 0,1$, pour quelle valeur de n peut-on être certain que

$$u_n \leq \alpha \leq u_n + 10^{-10}$$

Écrire un programme Python qui calcule une valeur approchée de α à 10^{-10} près.

Exercice - Étude d'une suite explicite

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \end{cases}$$

ainsi que les sommes $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2$

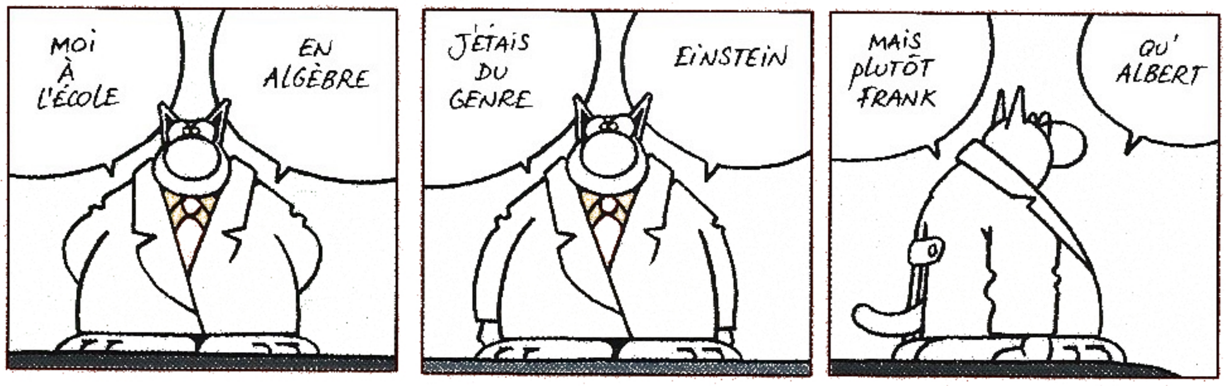
1. a) Etudier $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$ et déterminer son signe.
(Domaine de définition, dérivabilité, tableau de variation ...)
b) Donner un encadrement de la suite et en déduire qu'elle converge vers 0.

2. a) Étudier $h : x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$ et déterminer son signe sur $[1\ ;+\infty[$.
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$$
c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Donner une minoration de $(S_{2n} - S_n)$ indépendante de n.
d) En déduire que la suite (S_n) n'a pas de limite finie.
Que peut-on conclure sur la suite (S_n) ?

3. a) Montrer que $\forall x \in [1\ ;+\infty[,\ \ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right) < \dfrac{3}{x+1}$.
b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < \dfrac{3}{n+1}$.
c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.
d) En déduire la nature de la suite de terme général $T_n = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$.

FIN DE L'ÉNONCÉ


SI UN HOMME AVERTI
EN VAUT DEUX
UN HOMME À MOITIÉ AVERTI
EN VAUT UN
DONC, UN HOMME, À MOITIÉ AVERTI
VAUT UN HOMME PAS AVERTI DU TOUT


MOI À L'ÉCOLE
EN ALGÈBRE
J'ÉTAIS DU GENRE
EINSTEIN
MAIS PLUTÔT FRANK
QU'ALBERT


ON DIT QU'UN BON DESSIN
VAUT MIEUX QU'UN LONG DISCOURS
ET JE NE SUIS PAS LOIN DE CROIRE QUE DANS LA CIVILISATION DE L'IMAGE (QU'ELLE SOIT DIGITALE, IMPRIMÉE, TÉLÉVISUELLE, PUBLICITAIRE) QUI EST LA NÔTRE (QU'ON LE VEUILLE OU NON)
LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE IDÉE FORTE PEUT DAVANTAGE FRAPPER LES ESPRITS QUE D'INTERMINABLES VERBIAGES ALAMBIQUÉS DONT CHAQUE TERME, AUSSI APPROPRIÉ SOIT-IL, NUIT À LUI-MÊME ET, PLUS GRAVE, À L'ENSEMBLE


UN JOUR, UN VIEUX BIRMAN M'A DIT CETTE CHOSE :
« SI TU UN JOUR DE LE VOIR UNE COQ
AVOIR SA PLUMAGE QUI ONT ÊTRE DE LUI
IL ALORS ÊTRE LE PLUS MIEUX DE VENIR PLUS LOIN »
ET PLUSIEURS ANNÉES PLUS TARD ...
JE N'AI TOUJOURS PAS COMPRIS CE QU'IL A VOULU DIRE