Colle 10

Les questions "★ " sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

Extrait du programme

Nombres réels et suites numériques

d. Limite d'une suite réelle

Limite infinie d'une suite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notation $u_n \leftarrow \ell$, $\lim u_n$.
Existence d'une limite par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $+\infty$).	

f. Suites extraites

Suite extraite. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ.
Théorème de Bolzano-Weierstraß.	Principe de démonstration par dichotomie.

g. Traduction séquentielle de certaines propriétés

Si X est une partie non vide non majorée de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $+\infty$.	Résultats analogues pour X non vide non minorée.

h. Suites complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
Théorème de Bolzano-Weierstraß.	

i. Suites particulières

Suite arithmétique, géométrique. Suite arithmético–géométrique.	Les étudiants doivent savoir déterminer une expression du terme général de ces suites.
Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.	
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.	Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n), on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f.

Analyse asymptotique

c. Relations de comparaison : cas des suites *(ancien programme)*

Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$. On définit ces relations à partir du quotient $\frac{u_n}{v_n}$ sous l'hypothèse que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées des suites de termes généraux $\ln^\beta(n)$, n^α, $\exp(\gamma n)$.
Liens entre les relations de comparaison.	Équivalence des relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.
Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances.	
Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	

Méthodes et savoir-faire

- Savoir identifier ou se ramener à une suite arithmético-géométrique ou récurrente linéaire d'ordre 2 et savoir retrouver sa forme explicite.
- Comparer les suites usuelles.
- Utiliser les équivalents pour déterminer une limite.
- Étudier une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Questions de cours

➜ Définition de limite infinie. Opérations algébriques. Théorème de comparaison. Résultat sur les suites monotones.

★ Montrer qu'une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$

➜ Relations de comparaison :

- Définir les notions de domination, de négligeabilité et d'équivalence (pour des suites ne s'annulant pas a.p.c.r.).
- Donner des exemples et des propriétés dont celle reliant $\sim$ et $o(\ )$.
- Donner des contre-exemples sur les incompatibilités de l'équivalent avec la somme et la composition (à gauche).

➜ Citer les comparaisons des suites usuelles en négligeabilité (croissances comparées) : $(n!)$, (n^a), (q^n) et $(\ln(n)^b)$.
Citer les équivalents usuelles. Donner des exemples de ces comparaisons.

★ Citer les comparaisons des suites usuelles en négligeabilité (croissances comparées) : $(n!)$, (n^a), (q^n) et $(\ln(n)^b)$. Les démontrer, sauf celle avec $n!$.

➜ Notion de suite extraite.

- Définition
- Théorème : si une suite admet une limite alors toute suite extraite possède la même limite.
- Que dire de la réciproque ? Conditions éventuelles : (u_n) monotone, considérer les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
- Théorème de Bolzano-Weierstrass.

★ Montrer que si une suite admet une limite alors toute suite extraite possède la même limite.

★ Théorème de Bolzano-Weierstrass cas réel.

➜ Résultats sur les suites complexes.

➜ Suites particulières :

- arithmétique, géométrique : définition, expression explicite
- arithmético-géométrique : définition, méthode pour déterminer l'expression explicite
- récurrentes linéaires d'ordre 2 : définition, expression explicite

➜ Résultats sur les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$:

- définition d'une point fixe, lien avec la convergence éventuelle,
- lien entre le signe de $f(x) - x$ et la monotonie de la suite,
- lien entre la croissance de f et la monotonie de la suite,
- donner, sur un exemple, les étapes pour étudier une telle suite en fonction de son premier terme.