Colle 11

Les questions "★ " sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

Extrait du programme

1. Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité, dérivabilité, convexité

A. Limites et continuité

a. Limite d'une fonction en un point

Étant donné un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$	
Si f possède une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
Passage à la limite d'une inégalité large.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	
Théorème de la limite monotone.	

b. Continuité en un point

Continuité, prolongement par continuité en un point.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}f(a)$.
Continuité à gauche, à droite.	
Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.	
Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	

c. Continuité sur un intervalle

Continuité sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Principe de démonstration par dichotomie.
Image d'un intervalle par une fonction continue.	
Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.	
Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	
Image d'un segment par une fonction continue.	
Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone.	La démonstration n'est pas exigible.
Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur une intervalle.	La démonstration n'est pas exigible.

d. Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide de parties réelle et imaginaire.

2. Analyse asymptotique

a. Relation de comparaison : cas des fonctions

Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$.	Notations $$f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)), \quad f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)), \quad f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$
Lien entre ces relations	La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement.

Pour la relation $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 1$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs.
Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \leq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \to 0$.
Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^\beta(x)$, x^α, $e^{\gamma x}$ e, $+\infty$, de $\ln^\beta(x)$, x^α en 0.

Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O. Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f, g, h vérifient $f \leq g \leq h$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Méthodes et savoir-faire

- Écrire et identifier une définition de limite
- Calculer une limite en utilisant les relations de comparaisons
- Établir la continuité ou le prolongement par continuité
- Mettre en oeuvre le principe de dichotomie
- Différencier l'utilisation du TVI et du théorème de la bijection

Questions de cours

➜ Donner des exemples de définition de limite (exemples : $\lim\limits_{0} f = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f = -1$).
Définir la continuité en un point, le prolongement par continuité.

★ Caractérisation séquentielle de la limite

➜ Théorèmes de passage à la limite, d'encadrement et de comparaison, de composition.

➜ Relations de comparaison, propriétés (dont celle reliant $o(\ )$ et $\sim$, signe et $\sim$, limite et $\sim$, corollaire des encadrements), substitution (ou compatibilité avec la composition à droite), incompatibilité de l'équivalence avec la somme et la composition à gauche.
Donner un exemple ou contre-exemple dans chaque situation.

➜ Équivalents usuels, croissances comparées

★ Soit $f, g \in (\mathbb{R}_+^*)^I$ et a un élément ou une extrémité de I tels que $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{a} g = \ell \in \{0, +\infty\}$.
Montrer que $\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$.

➜ Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle/d'un segment par une application continue. Théorème de la limite monotone et son lemme. Liens entre injectivité et stricte monotonie. Théorème de la bijection.

★ Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

★ Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction croissante. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

★ Théorème des valeurs intermédiaires.

★ L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.