DM 9

à rendre le lundi 11 décembre 2023

Étude d'une suite récurrente d'ordre 2

On souhaite étudier la suite définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n) + \ln(1 + u_{n-1}).$$

1. Questions préliminaires

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.

b) Écrire un script PYTHON demandant à l'utilisateur d'entrer u_0, u_1 et n, et affichant u_n.

c) Montrer que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est un point fixe de la fonction :

$$\varphi\ :\ \begin{cases} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\ln(1 + x) \end{cases}.$$

Remarque : On appelle *point fixe* de φ tout nombre vérifiant $\varphi(x) = x$.

2. Points fixes de φ

a) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on pose :

$$g(x) = \varphi(x) - x.$$

Dresser le tableau de variations de g et en déduire que φ admet exactement 2 points fixes : 0 et ℓ, où ℓ est un réel appartenant à $]1, 3[$ qu'on ne cherchera pas à déterminer.
On donne $\ln 2 \simeq 0,69$.

b) Construire par dichotomie deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes convergeant vers ℓ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n < \ell \leq b_n.$$

On prendra $a_0 = 1$ et $b_0 = 3$.

c) Donner le script d'une fonction `limWhile(p)` utilisant une boucle `while`, qui retourne une valeur approchée de ℓ à la précision `p`.

d) Considérant $p > 0$, déterminer une valeur de n telle $\dfrac{a_n + b_n}{2}$ soit une valeur approchée de ℓ à la précision p.
Donner le script d'une fonction `limFor(p)` utilisant une boucle `for`, qui retourne une valeur approchée de ℓ à la précision `p`.

3. Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On pose $m = \min(u_0, u_1, 1)$ et $M = \max(u_0, u_1, 3)$ et on définit les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $s_0 = s_1 = m$, $t_0 = t_1 = M$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, s_{n+1} = \ln(1 + s_n) + \ln(1 + s_{n-1}) \quad \text{et} \quad t_{n+1} = \ln(1 + t_n) + \ln(1 + t_{n-1}).$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq u_n \leq t_n$.

b) Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

Indication : on pourra montre par une récurrence d'ordre 2 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s_n - s_{n-1} \geq 0$.

On admet qu'on montrerait de façon analogue que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.