DM 10

à rendre le lundi 18 décembre 2023

Comportement asymptotique d'une suite implicite

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x^4 + 2x^3 + x + \ln(x)$$

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation d'inconnue $x > 0$: $f(x) = n$ a une unique solution x_n puis de calculer un *développement asymptotique* de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et tracer le graphe de f.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation d'inconnue $x > 0$: $f(x) = n$ a une unique solution que l'on notera x_n.

3. Montrer que $x_n \geq \frac{1}{2}n^{\frac{1}{4}}$ à partir d'un certain rang. En déduire la limite de (x_n).

4. Démontrer que $x_n \sim n^{\frac{1}{4}}$.

5. Si on décompose :

$$x_n = n^{\frac{1}{4}}\left(1 + \alpha_n\right)$$

que peut on dire de α_n ?

En injectant l'expression précédente dans l'équation : $f(x_n)$, en déduire que :

$$x_n = n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} + o(1)$$

6. En s'inspirant de la question précédente, montrer :

$$x_n = n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8n^{\frac{1}{4}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)$$