DS 6 bis

Mercredi 20 décembre 2023 – durée : 2 h

Problème 1 - Matrices productives

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes.

- Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite **positive** si et seulement si tous les coefficients de M sont positifs ou nuls. On notera alors $M \geq 0$.
- Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite **strictement positive** si et seulement si tous les coefficients de M sont strictement positifs. On notera alors $M > 0$.
- Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la notation $M \geq N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geq 0$ (respectivement $M - N > 0$).
- Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **productive** si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes : M est positive et il existe une matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.

Partie A - Etude d'exemples

1. En considérant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que la matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est productive.

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.

Partie B - Caractérisation des matrices positives

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que, si M est positive, alors, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.

4. Réciproquement, montrer que, si, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif, alors la matrice M est positive.

Partie C - Caractérisation des matrices productives

5. Soit A une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est noté a_{ij}, et P une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $P - AP > 0$. On note $p_1, \ldots, p_n$ les coefficients de la matrice colonne P.

   a) Montrer que $P > 0$.

b) Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geq AX$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les coefficients de la matrice colonne X. On désigne par c le plus petit des réels $\dfrac{x_j}{p_j}$ lorsque l'entier j décrit l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et k un indice tel que $c = \dfrac{x_k}{p_k}$.

Établir que $c\Big(p_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}p_j\Big) \geq 0$. En déduire que $c \geq 0$ et que X est positive.

c) Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$.
En remarquant que $-X \geq A(-X)$, montrer que X est nulle.
En déduire que $I_n - A$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d) Montrer que, pour toute matrice positive X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1}X$ est positive (on pourra utiliser C5b).
En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

6. Dans cette question, on considère une matrice positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et telle que $(I_n - B)^{-1}$ soit positive. On note $V = (I_n - B)^{-1}U$, où U est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

   Montrer que $V - BV > 0$. Conclure.

7. Donner une caractérisation des matrices productives.

8. Application : Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$.

   Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.

Problème 2 - Théorème de Césaro

Pour toute suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

La suite (b_n) est appelée *moyenne de Césaro* de la suite (a_n).

Objectif : Démontrer le théorème suivant :

Théorème – Si la suite (a_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors la suite (b_n) tend vers ℓ.

Théorème de Césaro

Toutes les questions sont indépendantes.

1. Commençons par un cas simple : on suppose que la suite (a_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et qu'il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$|a_n - \ell| \leq \alpha^n$$
   Montrer que (b_n) converge aussi vers ℓ.

2. Cas général de convergence : On suppose que (a_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$

   a) Montrer que pour tout $p, n \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq n$ alors
$$|b_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} |a_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n} |a_k - \ell|$$

b) Montrer que (b_n) converge vers ℓ.

.

3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$
En introduisant une moyenne de Césaro, montrer que la suite (v_n) converge et donner sa limite.

4. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général
$$w_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{5}{k}\right)^{\frac{k}{n}}$$
Déterminer la limite de la suite (w_n).

5. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = \alpha$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \beta$.
Montrer que (b_n) converge et donner sa limite.

6. Soit (c_n) une suite telle que
$$c_{n+1} - c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$$
Montrer que $\dfrac{c_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

7. Cas général de limite infinie : On suppose que (a_n) converge vers $+\infty$.

   a) Montrer que pour tout $p, n \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq n$ alors
$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n} a_k$$
   b) Montrer que (b_n) converge vers $+\infty$.

Partie B - Étude d'une réciproque éventuelle

8. Montrer que la réciproque dans le cas où la limite est finie est fausse en donnant un contre-exemple.

9. Montrer que la réciproque dans le cas où la limite est infinie est fausse en donnant un contre-exemple.

10. Montrer que si la suite (a_n) est monotone alors la réciproque est vraie.

11. a) Considérons la suite (u_n) telle que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.
Montrer que si (b_n) converge alors (a_n) aussi.

    b) Considérant la formalisation suivante :
$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad (v_n) \text{ converge}$$
Quelle hypothèse venons nous d'établir qui valide la réciproque.

FIN DE L'ÉNONCÉ


SI TU DONNES UN POISSON À UN HOMME
IL MANGERA UN JOUR
SI TU LUI APPRENDS À PÊCHER
IL MANGERA TOUTE SA VIE !
RESTE JUSTE À ESPÉRER
QU'IL AIME LE POISSON


SI TU DONNES À UN HOMME UN POISSON QUE TU AS VOLÉ
IL MANGERA UNE FOIS
SI TU LUI APPRENDS
À VOLER DU POISSON
IL MANGERA
TOUTE SA VIE


SI TU DONNES UN POISSON À UN HOMME, IL MANGERA UN JOUR
SI TU LE FAIS LE 1ER AVRIL
IL EN RIRA TOUTE SA VIE

Problème 1 - Matrices productives

Partie A - Etude d'exemples

1. On note que $A \geq 0$ et $U \geq 0$. Calcul de $U - AU$:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} > 0$$

   Ainsi, $\boxed{A \text{ est productive.}}$

2. Soit $P = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Considérons $P - BP$:

$$P - BP = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&4&1\\2&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x+4y+z\\2x+y+3z\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4y-z\\-2x-3z\\0\end{pmatrix}$$

   Le troisième coefficient de $P - BP$ est nul donc $P - BP$ n'est pas *strictement positive*. Ceci vaut pour toute matrice positive P de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donc il n'existe pas matrice positive P de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - BP > 0$.

   Ainsi, $\boxed{B = \begin{pmatrix}1&4&1\\2&1&3\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ n'est pas productive.}}$

   Remarque : : la négation de "il existe une matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$" est "pour toute matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors $P - MP \not> 0$". Or $P - MP \not> 0$ ne signifie pas $P - MP \leq 0$ mais seulement que le vecteur $P - MP$ possède un coefficient négatif.

Partie B - Caractérisation des matrices positives

3. Considérons deux matrices positives : $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = (x_k) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   Posons $Y = MX = (y_k) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La définition du produit matriciel donne :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad y_k = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \underbrace{m_{k,j}}_{\geq 0} \underbrace{x_j}_{\geq 0}}_{\geq 0}$$

   Or la somme et le produit de nombres positifs est positif, donc Y est une matrice positive.

   Ainsi, $\boxed{\text{si } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est positive, alors pour tout } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ positive, } MX \text{ est aussi positive.}}$

4. Considérons $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant que pour toute matrice positive $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors MX est aussi positive.

   En particulier, pour $i \in [\![1, n]\!]$, prenons $X = e_i$: la matrice colonne ayant tous ses coefficients nul excepté celui sur la i-ème ligne qui vaut 1.

   Alors Me_i est positive. La calcul de Me_i donne la matrice colonne égale à la i-ème colonne de M. Donc les coefficients de la i-ème colonne de M sont positifs.

   Ceci valant pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les coefficients de M sont tous positifs.

   Ainsi, $\boxed{M \text{ est positive.}}$

   Nous venons d'établir la caractérisation suivante :

Un matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si pour toute matrice positive $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors MX est aussi positive.

Partie C - Caractérisation des matrices productives

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ productive et $P \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive telle que $P - AP > 0$.

a) Comme A et P sont positives, alors d'après B1), la matrice AP est aussi positive. Notons $Q = AP = (q_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $q_i \geq 0$.
Or $P - AP = P - Q > 0$, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$p_i - q_i > 0 \quad \Rightarrow \quad p_i > q_i \geq 0 \quad \Rightarrow \quad p_i > 0$$

Ainsi, $\boxed{P > 0,\ P \text{ est strictement positive.}}$

b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geq AX$.
Notons $R = AX = (r_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec pour $i \in [\![1, n]\!]$, $r_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.
Donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \geq r_i$.
Par définition $c = \dfrac{x_k}{p_k} = \min\left\{\dfrac{x_j}{p_j}, j \in [\![1, n]\!]\right\}$. Ainsi, pour $j \in [\![1, n]\!]$:

$$c \leq \frac{x_j}{p_j} \quad \Rightarrow \quad cp_j \leq x_j \quad \Rightarrow \quad ca_{kj}p_j \leq a_{kj}x_j \qquad \text{car } a_{kj} \geq 0 \text{ et } p_j \geq 0$$

Par sommation pour $j \in [\![1, n]\!]$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} ca_{kj}p_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \qquad &\Rightarrow \quad -\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \leq -\sum_{j=1}^{n} ca_{kj}p_j \\ &\Rightarrow \quad x_k - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j}_{=r_k} \leq x_k - \sum_{j=1}^{n} ca_{kj}p_j\end{aligned}$$

Or $x_k - r_k \geq 0$ donc $x_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} ca_{kj}p_j \geq 0$.

De plus $x_k = cp_k$. Ainsi, $\boxed{c\left(p_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}p_j\right) \geq 0}$.

De plus $P - AP > 0$, en particulier le coefficient de sa k-ème ligne est strictement positif : $p_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}p_j > 0$
En divisant l'inégalité trouvée juste avant par ce nombre on obtient : $c \geq 0$.
Il vient pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $x_i \geq cp_i \geq 0$ car $p_i \geq 0$.
Ainsi, $\boxed{c \geq 0 \text{ et } X \text{ est une matrice positive.}}$

c) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$.
Alors $X \geq AX$ et d'après C1b), $X \geq 0$.
De plus $-X = -AX = A(-X)$ donc $-X \geq A(-X)$, toujours d'après C1b), $-X \geq 0$.
Les coefficients de X étant positifs et négatifs, ils sont nuls : $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.
Ainsi, $\boxed{\text{X est nulle.}}$

On vient de montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$AX - X = (A - I_n)X = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \quad \Rightarrow \quad X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

Ceci caractérise le fait que la matrice $A - I_n$ est inversible.

En effet, si $A - I_n$ est inversible, le résultat est clairement vrai. Montrons l'implication qui nous intéresse :
L'ensemble des solutions du système associé à l'égalité matricielle $(A - I_n)X = 0$ ne contient qu'un seul élément : $X = 0$.
Ceci indique que la réduction par la méthode du pivot de Gauss ne donne pas d'inconnue secondaire et donc qu'il y a autant de pivots que d'inconnues (et aussi autant d'équations). La matrice est bien inversible.

Ainsi, $\boxed{A - I_n \text{ est inversible.}}$

d) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice positive et $Y = (I_n - A)^{-1}X$. Alors

$$X = (I_n - A)Y = Y - AY \geq 0$$

D'après C.5.b) $\boxed{Y \text{ est positive.}}$

On vient de montrer que pour tout matrice positive $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $(I_n - A)^{-1}X$ est aussi positive. D'après la caractérisation des matrice positive vue en B), plus particulièrement B2), nous obtenons que $\boxed{(I_n - A)^{-1} \text{ est positive}}$.

6. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive telle que $I_n - B$ soit inversible et $(I_n - B)^{-1}$ soit positive.

   Posant $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1 alors U est strictement positive. D'après B1) $V = (I_n - B)^{-1}U$ est aussi positive.

   De plus $(I_n - B)V = V - BV = U > 0$. Ainsi, $\boxed{B \text{ est productive.}}$

7. D'après C2) et C3) une caractérisation des matrices productive est :

   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{Un matrice } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est productive si et seulement si} \\ M \text{ est positive, } I - M \text{ est inversible et } (I_n - M)^{-1} \text{ est positive.}\end{array}}$$

8. Considérons une matrice positive $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$. Alors,

   $$(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n + \underbrace{2M - M - 2M^2}_{=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}} = I_n$$

   La matrice $I_n - M$ est inversible et $(I_n - M)^{-1} = I_n + 2M$.

   La somme de deux matrices positives étant positive, il vient $(I_n - M)^{-1} \geq 0$. D'après la caractérisation des matrices productives établie en C.7), on peut affirmer que $\boxed{M \text{ est productive.}}$

Problème 2 - Théorème de Césaro

Partie A - Théorème de Césaro

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

   $$|b_n - \ell| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ell \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (a_k - \ell) \right|$$

L'inégalité triangulaire donne :

$$|b_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - \ell|$$

Par somme d'inégalités, puis par somme géométrique avec $\alpha \in [0,1[$:

$$|b_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha^k = \frac{\alpha}{n}\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \leq \frac{\alpha}{n(1-\alpha)}$$

Comme $\dfrac{\alpha}{n(1-\alpha)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par encadrement, il vient : $|b_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (b_n) \text{ converge aussi vers } \ell.}$

2. a) Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq n$

$$|b_n - \ell| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \ell)\right|$$

L'inégalité triangulaire donne :

$$|b_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - \ell|$$

Découpons la somme :

$$|b_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}|a_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n}|a_k - \ell|$$

Ainsi, pour tout $p, n \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq n$ alors

$$|b_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}|a_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n}|a_k - \ell|$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme (a_n) converge vers ℓ, la définition de la limite pour $\dfrac{\varepsilon}{2}$ donne :

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \quad k \geq p \quad \Rightarrow \quad |a_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On considère l'inégalité obtenue à la question précédente.
⇛ D'une part, par somme d'inégalités, pour tout $n \geq p$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n}|a_k - \ell| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{(n-p)\varepsilon}{2n} \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ car } n - p \leq n$$

⇛ D'autre part $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}|a_k - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc la définition de la limite pour $\dfrac{\varepsilon}{2}$ donne :

$$\exists n_0 \geq p, \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}|a_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Enfin, pour $n \geq n_0$, on obtient :

$$|b_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (b_n) \text{ converge vers } \ell.}$

.

3. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la moyenne de Césaro associée à la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   Or $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc d'après le théorème de Césaro, la suite (v_n) converge vers 0.

4. Soit $n \geq 1$

$$\ln(w_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\ln\left(1+\frac{5}{k}\right)$$

   De plus, une limite usuelle donne : $k\ln\left(1+\frac{5}{k}\right) = 5\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{5}{k}\right)}{\frac{5}{k}}}_{\to 1} \to 5$

   Ainsi, $(\ln(w_n))$ est la moyenne de Césaro associée à la suite $\left(k\ln\left(1+\frac{5}{k}\right)\right)$ qui converge vers 5.

   Donc $(\ln(w_n))$ converge vers 5.

   Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ converge vers } e^5.}$

5. Considérons la nouvelle suite (x_n) définie par

$$x_{2n} = a_{2n} - \alpha \text{ et } x_{2n+1} = a_{2n+1} - \beta$$

   Ainsi les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) converge vers 0. Donc, par recouvrement des indices, la suite (x_n) converge vers 0. Ainsi sa moyenne de Césaro converge aussi vers 0.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_i &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} x_{2j} + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor} x_{2j+1} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(a_{2j}-\alpha) + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor}(a_{2j+1}-\beta) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\alpha + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor}\beta\right) \\
&= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_i}_{=b_n} - \left(\frac{\alpha}{n}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \frac{\beta}{n}\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\right)
\end{aligned}$$

   Or $\frac{\lfloor x\rfloor}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

   En effet, pour $x > 0$

$$x - 1 < \lfloor x\rfloor \leq x \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x\rfloor}{x} \leq 1$$

   Par encadrement, lorsque $x \to +\infty$, il vient $\frac{\lfloor x\rfloor}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Donc, pour toute suite (u_n) qui tend vers $+\infty$, $\lfloor u_n \rfloor \sim u_n$.
Ainsi, $\dfrac{\alpha}{n}\left\lfloor \dfrac{n}{2}\right\rfloor \sim \dfrac{\alpha}{n}\dfrac{n}{2} \sim \dfrac{\alpha}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\alpha}{2}$ et $\dfrac{\beta}{n}\left\lfloor \dfrac{n+1}{2}\right\rfloor \sim \dfrac{\beta}{n}\dfrac{n+1}{2} \sim \dfrac{\beta}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\beta}{2}$.
Donc $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_i = b_n - \dfrac{\alpha+\beta}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (b_n) \text{ converge vers } \dfrac{\alpha+\beta}{2}.}$

6. Comme la suite $(c_{n+1} - c_n)$ converge vers ℓ, sa moyenne de Césaro aussi. De plus, une simplification téléscopique donne :

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} c_{k+1} - c_k = \frac{1}{n-1}(c_n - c_1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Or $\dfrac{c_1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par opération sur les suite, on a : $\dfrac{c_n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

$$\frac{c_n}{n} = \frac{c_n}{n}\underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\to 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } \dfrac{c_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.}$

7. a) Une découpage de somme donne directement que pour tout $p, n \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq n$ alors

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n} a_k$$

b) Soit $A > 0$. La définition de la limite de (a_n) qui tend vers $+\infty$ pour $3A \in \mathbb{R}$ donne :

$$\exists p \in \mathbb{N}; \quad k \geq p \quad \Rightarrow \quad a_k \geq 3A$$

Par somme d'inégalités :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n} a_k \geq \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n} 3A \geq \frac{n-p}{n}3A \geq \left(1 - \frac{p}{n}\right)3A$$

Pour $n \geq 3p$, on a $1 - \dfrac{p}{n} > \dfrac{2}{3}$ et donc $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} a_k \geq 2A$

Enfin, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La définition de la limite donne pour $A > 0$:

$$\exists n_0 > p; \qquad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad -A \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} a_k \leq A$$

Par sommation des inégalités, pour $n \geq \max(n_0, 3p)$:

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n} a_k \geq 2A - A \geq A$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (b_n) \text{ converge vers } +\infty.}$

Étude d'une réciproque éventuelle

8. Considérons la suite $(a_n) = ((-1)^n)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \begin{cases} 0 \text{ si } n\text{pair} \\ \dfrac{1}{n} \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{donc } b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Mais (a_n) ne converge pas vers 0.

Ainsi, $\boxed{\text{la réciproque dans le cas où la limite est finie est fausse.}}$

9. Considérons la suite $(a_n) = (n(1 + (-1)^n))$ ce qui donne $a_{2n} = 4n$ et $a_{2n+1} = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} n(1+(-1)^k) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2j \times (1+1) + \underbrace{0}_{\text{indices impairs}} \\ &= \frac{4}{n}\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1\right)}{2} \sim \frac{4}{n}\frac{\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}}{2} \sim \frac{n}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{aligned}$$

Mais (a_n) ne tend pas vers $+\infty$.

Ainsi, $\boxed{\text{la réciproque dans le cas où la limite est infinie est fausse.}}$

10. Considérons (a_n) monotone alors elle admet une limite soit finie soit infinie. La moyenne de Césaro associée, (b_n) admet respectivement la même limite.
Ainsi, le réciproque de théorème est vérifiée. En effet, si (b_n) admet une limite, a fortirio, cette limite est la même que celle de la suite (a_n) (qui existe de par sa monotonie) d'après le théorème de Césaro..

Ainsi, $\boxed{\text{si la suite } (a_n) \text{ est monotone alors la réciproque est vraie.}}$

11. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} u_j$$

Permutons les sommes

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} u_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)u_j \\ &= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} nu_j}_{=a_n} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-1)u_j \end{aligned}$$

Or $u_k = o\left(\dfrac{1}{k}\right)$ donc $(k-1)u_k \to 0$. D'après le théorème de Césaro on a

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-1)u_j \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{si } (b_n) \text{ tend vers } \ell \in \overline{\mathbb{R}} \text{ alors } (a_n) \text{ aussi.}}$

b) La condition que nous venons d'exhiber pour établir l'implication suivante :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad (v_n) \text{ converge}$$

est $v_{n+1} - v_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.