Colle 13

Les questions "★ " sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

Extrait du programme

1. Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité, dérivabilité, convexité

B Dérivabilité

c. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème de Rolle.	
Égalité des accroissements finis.	Interprétations géométrique et cinématique.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\lvert f'\rvert$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.	La fonction f' est alors continue en a.

e. Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^1$.	On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

C. Convexité

a. Généralités

La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.	Interprétation géométrique.
Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I, on a l'inégalité $$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$ quels que soient les réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments $x_1, \dots, x_n$ de I.	Tout développement général sur les barycentres est hors programme.
Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.	
Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.	

b. Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

Caractérisation des fonctions convexes dérivables.
Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.
Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.

Méthodes et savoir-faire

- Mettre en oeuvre les théorèmes des accroissements finis
- Étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ par majoration géométrique.
- Identifier une inégalité liée à la convexité

Questions de cours

➜ Théorème de Rolle. Théorème des accroissement finis (égalité et inégalité).

★ Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Montrer que si f s'annule en $n+1$ points de $[a,b]$ alors f' s'annule en au moins n points de $]a,b[$.

★ Théorème sur l'égalité des accroissements finis.

★ Théorème de limite de la dérivée.

★ Lemme de primitivation d'un DL

➜ Caractérisation des fonction constante, des fonctions monotones. Théorème de limite de la dérivée. Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^k$.

➜ Extension des notions aux fonctions complexes

➜ Tout sur la convexité : fonction convexe, fonction concave, interprétation géométrique (faire des dessins), inégalité de Jensen, point d'inflexion, caractérisation par les pentes croissantes, caractérisation pour les fonction de classe $\mathcal{C}^1$, caractérisation pour les fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

★ Montrer que pour $n \geq 2$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, montrer les inégalités $m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_q$.

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq (x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}{n}}$$