

Colle 12

Les questions "★" sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

EXTRAIT DU PROGRAMME

1. FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE : LIMITES ET CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ, CONVEXITÉ

B DÉRIVABILITÉ

A. NOMBRE DÉRIVÉ, FONCTION DÉRIVÉE

Dérivabilité en un point, nombre dérivé.

La dérivabilité entraîne la continuité.

Dérivabilité à gauche, à droite.

Définition par le taux d'accroissement.

Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a .

Dans ce cas

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\epsilon(h), \text{ où } \epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Interprétation géométrique : tangente.

Interprétation cinématique : vitesse instantanée.

Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.

Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.

Tangente au graphe d'une fonction réciproque.

B. EXTREMUM LOCAL ET POINT CRITIQUE

Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.

Un point critique est un zéro de la dérivée.

D. FONCTIONS DE CLASSE \mathcal{C}^k

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe \mathcal{C}^k .

Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.

Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

2. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

B. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.

Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0.

Signe de f au voisinage de a .

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire.

Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement.

Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : pour f de classe \mathcal{C}^n , développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$.

Développement limité à tout ordre en 0 de \exp , \sin , \cos , \sinh , \cosh , $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1-x)^\alpha$, Arctan .

Développement limité à l'ordre 3 en 0 de \tan .

Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.

Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.

Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.

MÉTHODES ET SAVOIR-FAIRE

- Établie la dérivabilité d'une application (sur un intervalle, en un point)
- Calculs de DL (opération algébrique, composition, primitivation).
- Calcul de développement asymptotique (en posant par exemple $u = \frac{1}{x}$) et application au positionnement d'une courbe (asymptote, tangente).

QUESTIONS DE COURS

- Définir la dérivabilité en un point, la dérivabilité à gauche (et à droite). Fonction dérivée. Introduire l'approximation affine. Faire le lien avec la courbe et sa tangente. Donner la dérivée des fonctions usuelles
- ★ Montrer que si f et g sont dérivable en a alors fg l'est aussi et $(fg)' = f'g + fg'$.
- ★ Définition des dérivées successives. Opérations sur les dérivées dont la formule de Leibniz. Déterminer la dérivée d'ordre n de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.
- Développement limité à l'ordre n au voisinage d'un point, écriture ramenée en 0, écriture normalisée. DL usuels en 0 (voir le PO)
- ★ Unicité du DL.
- ★ Énoncer la primitivation d'un DL. Déterminer le DL de Arctan et le $DL_5(0)$ de tan.
- ★ Établir la condition nécessaire d'ordre 1 pour l'existence d'un extremum en un point intérieur. Donner la condition suffisante d'ordre 2 pour l'existence d'un extremum en un point intérieur.