DM 12 (optionnel)

à rendre le lundi 15 janvier 2023

Courbes paramétrées

Objectif : Mener l'étude d'une courbe et la tracer (sans avoir recours à un logiciel)

Attention ! Il est intellectuellement plus satisfaisant de ne pas utiliser de logiciel pour avoir une allure de la courbe mais de mener l'étude d'abord et de vérifier éventuellement quand tout est bien finalisé.

Partie A - Cas de coordonnées cartésiennes

Étude de la courbe paramétrée $\mathcal{C}_1$, appelée le *Lemniscate de Bernoulli* d'équation

$$t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right)$$

1. **Domaine d'étude** - Déterminer le domaine de définition, $\mathcal{D}$, puis par réductions successives montrer que le domaine minimal d'étude est $\mathcal{D}_e = [0, 1]$

> Exemples de transformations laissant la courbe invariante et donc permettant de réduire le domaine :
> - Translation de vecteur $\overrightarrow{u} = (a, b)$: $\exists T > 0;\ x(t+T) = x(t) + a$ et $y(t+T) = y(t) + b$
> - Réflexion d'axe (Ox) : $x(t') = x(t)$ et $y(t') = -y(t)$
> - Réflexion d'axe (Oy) : $x(t') = -x(t)$ et $y(t') = y(t)$
> - Symétrie centrale de centre O : $x(t') = -x(t)$ et $y(t') = -y(t)$
> - Réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$: $x(t') = y(t)$ et $y(t') = x(t)$
> - Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centre O : $x(t') = -y(t)$ et $y(t') = x(t)$.

2. **Branches infinies** - Montrer que $\mathcal{C}_1$ n'a pas de branche infinie.

> L'étude des branches consiste à déterminer le comportement de la courbe dès lors que $x(t)$ ou $y(t)$ tend vers l'infini. On peut être amener à considérer $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ pour les branches paraboliques.

3. **Variations** - Déterminer les variations de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $\mathcal{D}_e$.

4. **Points particuliers** - L'étude des points particuliers permettent d'affiner le tracer de la courbe. Il y a plusieurs types de points particulier :

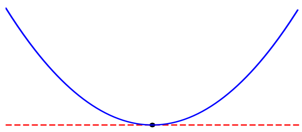
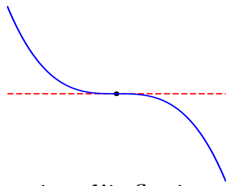
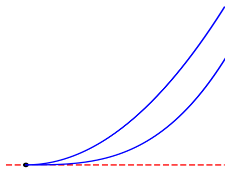
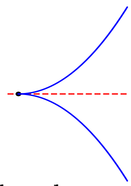
a) **Intersections avec les axes** - Déterminer les éventuels points d'intersections avec les axes.

> - Un point d'intersection avec l'axe (Ox) est caractérisé par : $y(t) = 0$.
> - Un point d'intersection avec l'axe (Oy) est caractérisé par : $x(t) = 0$.

b) **Points singuliers** - Étudier les éventuels points singuliers de $\mathcal{C}_1$

> Un point singulier est caractérisé par : $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$. Pour étudier la tangente éventuelle, revenir à l'étude du taux d'accroissement au voisinage de t_0 : $\dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$.

c) **Position par rapport à la tangente** - Étudier la position de la courbe aux points stratégiques.

> On note $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ le point associé au paramètre t. On considère l'expression suivante, obtenue en faisant un DL de $x(t)$ et $y(t)$ en t_0, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p < q$ et :
>
> $$M(t) = M(t_0) + (t-t_0)^p \overrightarrow{v} + (t-t_0)^q \overrightarrow{w} + o\big((t-t_0)^q\big)\overrightarrow{\varepsilon(t)}$$
>
> - $\overrightarrow{v}$ est le vecteur tangent
> - $\overrightarrow{w}$ un vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{v}$ (sinon il faut pousser le DL plus loin)
> - $\overrightarrow{\varepsilon(t)}$ un vecteur de norme bornée au voisinage de t_0.
>
> La position relative de la courbe par rapport à sa tangent en un point $M(t_0)$ s'identifie selon quatre situations.
>
> | | q pair | q impair |
> |---|---|---|
> | p impair |  point ordinaire |  point d'inflexion |
> | p pair |  point de rebroussement de 2nd espèce |  point de rebroussement de 1ère espèce |

5. **Tracé de la courbe** - Tracer la courbe $\mathcal{C}_1$.
6. **Points multiples** - Déterminer les éventuels points multiples de $\mathcal{C}_1$.

> Un point multiple est point où la courbe passent plusieurs fois, sans compter l'aspect éventuellement périodique. Souvent, cette étude se fait après avoir déterminer l'allure de la courbe. Un tel point se détermine sur $\mathcal{D}$ par :
> $$\exists t, t' \in \mathcal{D}; \qquad x(t) = x(t') \text{ et } y(t) = y(t') \text{ avec } t \neq t'$$

7. **Longueur de la courbe** - Donner une expression sous forme d'intégrale de la longueur de la courbe $\mathcal{C}_1$

> Considérant un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, alors la longueur de la courbe entre deux points de paramètre a et b est $\displaystyle\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t$.
> Si une borne est infinie ou associée à une branche infinie, n'ayant pas encore introduit les intégrales généralisée, vous pourrez aborder la question par un calcul de limite.
> Par exemple, pour la borne b : $\displaystyle\lim_{u \to b} \int_a^u \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t$.

8. Reprendre le cadre d'étude précédent pour étudier et tracer les courbes suivantes :

a) $t \mapsto \Big(2\cos(2t), \sin(3t)\Big)$

b) L'astroïde : $t \mapsto \Big(\cos^3(t), \sin^3(t)\Big)$

c) La cycloïde : $t \mapsto \Big(t - \sin(t), 1 - \cos(t)\Big)$

9. L'équation suivante porte le nom du *folium de Descartes* :

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

a) Introduire un paramétrage en posant $y(t) = tx(t)$.
b) Étudier et tracer la courbe.

Partie B - Coordonnées polaires

Étude de la courbe paramétrée $\mathcal{C}_2$ d'équation : $r : \theta \mapsto \cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$

Méthode : Il est possible d'étudier la courbe ou certains aspects, en particulier les points particuliers, en considérant ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}_c = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

$$\theta \mapsto \Big(r(\theta)\cos(\theta), r(\theta)\sin(\theta)\Big)$$

Toutefois, nous essayerons tant que possible, de travailler sur la forme polaire, dans le repère

$$\mathcal{R}_p = \left(O, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta}\right) \text{ avec } \theta = \left(\widehat{\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{i}}\right) \text{ et } \frac{\pi}{2} = (\widehat{\overrightarrow{v_\theta}, \overrightarrow{u_\theta}})$$

où $M(\theta)$, le point de paramètre θ, a pour coordonnée $\big(r(\theta), 0\big)$ dans $\mathcal{R}_p$.

10. Identifier dans chaque situation, la transformation qui laisse la courbe invariante :

$$\begin{aligned}
&\text{(i) } T_1 : && \forall\theta, && r(-\theta) = r(\theta)\\
&\text{(ii) } T_2 : && \forall\theta, && r(\pi - \theta) = r(\theta)\\
&\text{(iii) } T_3 : && \forall\theta, && r(\pi - \theta) = -r(\theta)\\
&\text{(iv) } T_4 : && \forall\theta, && r(\theta + \pi) = -r(\theta)\\
&\text{(v) } T_5 : && \forall\theta, && r(\theta + \pi) = r(\theta)\\
&\text{(vi) } T_6 : && \forall\theta, && r\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r(\theta)\\
&\text{(vii) } T_7 : && \forall\theta, && r(\theta + \varphi) = r(\theta) \text{ où } \varphi \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

11. Déterminer le domaine de définition de $\mathcal{C}_2$, puis par réductions successives montrer que le domaine minimal d'étude est $\mathcal{D}_e = \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

12. De façon générale, analyser la problématique des branches infinies en coordonnées polaires : nature, étude,...
Quand est-il d'éventuelles branches infinies de $\mathcal{C}^2$?

13. Dresser le tableau de variations de $\theta \mapsto r(\theta)$ sur $\mathcal{D}_e$.

14. **Vecteur tangent**

a) Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = \overrightarrow{v_\theta}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\overrightarrow{u_\theta}$.

b) Donner le vecteur tangent $\overrightarrow{T_\theta}$ de la courbe en $M(\theta)$, un point distinct de O, l'origine du repère.
Notons $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{T_\theta}, \overrightarrow{u_\theta}}\right)$. Donner une relation entre $\tan(\alpha), r(\theta)$ et $r'(\theta)$.

c) Quelle est la direction d'un vecteur tangent en $M(\theta)$, un point confondu avec O ?

d) En déduire qu'un point de la courbe confondu avec O est soit un point ordinaire soit un point rebroussement de 1ère espèce.

e) Étudier les tangentes aux points particuliers de $\mathcal{C}_2$.

15. Tracer $\mathcal{C}_2$.

16. Comment peut-on caractériser un point multiple en coordonnée polaire ?
Étudier les éventuels points multiples de $\mathcal{C}_2$.

17. Que devient l'expression de la longueur de courbe en coordonnée polaire ?
Déterminer la longueur de $\mathcal{C}_2$.

18. Reprendre le cadre d'étude précédent pour étudier et tracer les courbes suivantes :

a) La cardioïde : $r : \theta \mapsto 1 + \cos(\theta)$

b) Une spirale logarithmique : $r : \theta \mapsto \ln(\theta)$

Remarque – L'étude des courbes paramétrée ne fait plus partie du programme officiel et donc des aptitudes requises des élèves de MPSI-MP.