

# Colle 18

Les questions "★" sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

## EXTRAIT DU PROGRAMME

### 1. DÉNOMBREMENT

#### A. CARDINAL D'UN ENSEMBLE FINI

Cardinal d'un ensemble fini.

Notations  $|A|$ ,  $\text{Card}(A)$ .

Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.

Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis.

Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.

La formule du crible est hors programme.

Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

#### B. LISTES ET COMBINAISONS

Nombre de  $p$ -listes (ou  $p$ -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal  $n$ , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal  $n$ .

Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal  $p$  dans un ensemble de cardinal  $n$ .

Nombre de parties à  $p$  éléments (ou  $p$ -combinaisons) d'un ensemble de cardinal  $n$ .

Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

### MÉTHODES ET SAVOIR-FAIRE

- Identifier les caractéristiques *ordre/répétition* en vue de mettre en place des  $p$ -listes, des  $p$ -arrangement (i.e.  $p$ -listes d'éléments distincts) ou des  $p$ -combinaisons.
- Exemples du cours : nombre d'anagrammes d'un mot, tirages dans une urne, main dans un jeu de cartes
- Calculs faisant intervenir le coefficient binomial :  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}, \dots$  (*revoir chapitre 1*)

### QUESTIONS DE COURS

- Cardinalité et premières propriétés (dont ensemble contraire, croissance, produit fini, réunion de deux ensembles)
- Tout sur les  $p$ -listes sur un ensemble à  $n$  éléments : définition, nombre de  $p$ -listes, exemples.
- Tout sur les  $p$ -arrangement sur un ensemble à  $n$  éléments : définition, nombre de  $p$ -arrangement, exemples.
- Tout sur les  $p$ -combinaisons sur un ensemble à  $n$  éléments : définition, nombre de  $p$ -combinaisons, exemples.
- Cardinalité et applications :
  - nombres d'applications entre deux ensembles finis
  - nombres d'applications injectives entre deux ensembles finis
  - ★  $f \in F^E$  avec  $|E| \in \mathbb{N}^*$  est injective si et seulement si  $|f(E)| = |E|$ .
  - ★  $f \in F^E$  avec  $|E| = |F|$  finis est bijective si et seulement si  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est surjective.
- ★ Cardinal de la réunion de deux ensembles finis, puis de trois ensembles finis.
- ★ Nombre d'applications surjectives de  $F^E$  avec  $|E| = p \in \mathbb{N}^*$  et  $|F| = 3$ .
- ★ Exercice : On tire 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. Combien de tirages différents contiennent :
  - a) exactement trois cœurs,
  - b) au plus trois cœurs,
  - c) exactement trois dames et au moins deux piques.
- ★ Exercice : Au loto sportif, le parieur remplit une grille dans laquelle il indique ses prévisions pour treize matchs de football à venir. Pour chaque match, il peut cocher au choix trois cases : "1" pour une victoire de l'équipe 1, "2" pour une victoire de l'équipe 2, et "N" pour un match nul. A l'issue d'un match une et une seule de ces trois réponses sera réalisée.
  - a) De combien de façons un parieur peut-il remplir la grille ?
  - b) Dénombrer les grilles pour lesquelles à l'issue des matchs :
    - (i) toutes les réponses sont exactes.
    - (ii) toutes les réponses sont fausses.
    - (iii) exactement trois réponses sont exactes.
  - c) Pour gagner, il faut avoir coché au moins dix réponses exactes. Quel est le nombre de grilles gagnantes ?
- ★ Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer  $S = \sum_{A, B \subseteq E} \text{Card}(A \cap B)$