

Colle 17

Les questions "★" sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

Attention ! Cette colle sera l'occasion de reposer des exercices sur la première partie du chapitre.

EXTRAIT DU PROGRAMME

POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

E. ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbb{K}[X]$

PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul.

Algorithme d'Euclide.

Relation de Bézout.

PPCM.

Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss.

PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.

H. FRACTIONS RATIONNELLES

Corps $\mathbb{K}(X)$.

Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle.

Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.

I. DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES SUR \mathbb{C} ET SUR \mathbb{R}

Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} .

Si λ est un pôle simple, coefficient de $\frac{1}{X - \lambda}$
Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B .

L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés; un seul est unitaire, on le note $A \wedge B$. Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.

Notation $A \vee B$.

Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans \mathbb{Z} .

La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme.

La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue.

Application au calcul de primitives, de dérivées k -ièmes.

MÉTHODES ET SAVOIR-FAIRE

- Algorithme d'Euclide et d'Euclide étendu
- Décomposer en éléments simples (forme générale + calcul des coefficients) sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R}

QUESTIONS DE COURS

- PGCD de deux polynômes (existence, unicité), algorithme d'Euclide.
Relation de Bezout, algorithme d'Euclide étendu. Propriétés.
PPCM de deux polynômes et ses propriétés
- PGCD d'une famille de polynômes. Propriétés du PGCD. Polynômes premiers entre eux.
- Théorème de Bezout, de Gauss et ses corollaires.
- Fractions rationnelles, opérations, degré, zéro, pôle, partie entière.
- Expliquer le principe de décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} , puis sur \mathbb{R} .
Donner des exemples formels (sans expliciter les coefficients)
- ★ Présenter différentes méthodes pour identifier les coefficients d'une décomposition :
 - méthode du cache
 - équivalent et valeur particulière
 - partie polaire associée à un pôle simple
 - ...
- ★ Calcul de $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^5 dt}{t^4 - 1}$.
- Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$
- ★ Partie polaire associée à un pôle simple
- ★ Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que :
 - (i) $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P(\bar{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$ divise P dans $\mathbb{R}[X]$
 - (ii) $\operatorname{mult}(P, \alpha) = \operatorname{mult}(P, \bar{\alpha})$
- ★ Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.