Colle 15

Les questions "★ " sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).
Les exercices pourront porter les deux chapitres précédents : dérivation et arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

Attention ! La partie *Structure algébriques* devra rester dans les limites du programme : les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et les lois artificielles sont hors programme.

Extrait du programme

1. Structures algébriques usuelles

Cette section a pour but l'introduction des notions les plus élémentaires relatives aux groupes, anneaux, corps, afin de traiter de manière unifiée un certain nombre de situations.

a. Lois de composition internes

Loi de composition interne.	On évite l'étude de lois artificielles.
Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité.	Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
Partie stable.	

b. Structure de groupe

Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}^*_+$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^*_+$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$.
Groupe des permutations d'un ensemble.	Notation S_X.
Groupe produit.	
Sous-groupe : définition, caractérisation.	
Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.	
Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité.	Notations $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$.
Isomorphisme.	

c. Structures d'anneau et de corps

Anneau.	Tout anneau est unitaire. Exemples usuels : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
Calcul dans un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
Groupe des inversibles d'un anneau.	
Anneau intègre. Corps.	Les corps sont commutatifs.
Sous-anneau.	
Morphisme d'anneaux. Isomorphisme.	

Méthodes et savoir-faire

- Montrer d'un ensemble est un sous-groupe, un sous anneau.
- Utiliser les propriétés d'un morphisme.

Questions de cours

➜ Loi de composition interne (magma), associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité d'une loi sur une autre, partie stable par une loi. La définition de chaque notion sera l'occasion de donner des exemples de magmas vérifiant la notion et d'autres ne la vérifiant pas.

➜ Groupe, sous-groupe, caractérisation d'un sous-groupe, morphisme de groupe, propriétés. Exemples.

★ Caractérisation d'un sous-groupe.

★ Propriétés d'un morphisme de groupe $f \in {G'}^G$: $f(1_G)$, $f\big(x^{-1}\big)$, image d'une sous-groupe de G, image réciproque d'un sous groupe de G'.

★ Caractérisation d'un morphisme injectif.

★ On appelle groupe monogène, tout groupe qui peut être engendré par un seul élément.

a) Montrer que tout sous-groupe G de $(\mathbb{Z}, +)$ est monogène, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G = n\mathbb{Z}$.

b) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $\mathbb{Z}$ et identifier $c \in \mathbb{N}$ tel que

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$$

★ Soit G un groupe tel que $\varphi : x \mapsto x^2$ soit un morphisme. Montrer que G est commutatif.

➜ Anneau (unitaire par définition), sous-anneau, caractérisation d'un sous-anneau, calculs dans un anneau, corps, morphisme d'anneau. Exemples.