DS 7

Mercredi 17 janvier 2024 – durée 2

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Problème 1 - Introduction à la formule de Taylor-Lagrange

On considère les fonctions ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Partie A - Étude des fonctions ch et sh

1. a) Étudier la parité des fonctions ch et sh.
   b) Dresser le tableau de variations de sh, et en déduire le signe de $\operatorname{sh}(x)$ en fonction de x.
   c) Étudier les variations de la fonction ch.
   d) Étudier la branche infinie de sh en $+\infty$.
   e) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) > \operatorname{sh}(x)$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)\big) = 0$ puis donner sur un même graphique l'allure des courbes représentatives des fonctions ch et sh.

2. a) Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note Argsh l'application réciproque.
   b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.
   c) Montrer que Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3. a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.
   b) On définit la fonction φ par : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.
   Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
   c) En déduire que $\varphi = \operatorname{Argsh}$.

Partie B - Une application du théorème de Rolle

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et g une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$.

4. Soit ψ l'application définie sur $[a, b]$ par :
$$\forall\, t \in [a, b],\ \psi(t) = g(t) - g(a) - g'(a)(t-a) - K(t-a)^2.$$
Déterminer la constante K pour que $\psi(b) = 0$.

5. Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que $\psi''(d) = 0$.

6. En déduire qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que : $g(b) = g(a) + (b-a)g'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} g''(d)$.

Partie C - Étude de la fonction f

7. Étudier la parité de f.

8. Montrer que la fonction f est continue en 0.

9. a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$, en utilisant la partie B montrer qu'il existe un réel d_x compris entre 0 et x tel que :
$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^2}{2}\operatorname{sh}(d_x)$$
   b) En déduire : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \left|\operatorname{sh}(x) - x\right| \leq \dfrac{x^2}{2}|\operatorname{sh}(x)|$.
   c) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

10. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

11. On pose $h(x) = \operatorname{sh}(x) - x\ \operatorname{ch}(x)$ pour $x \geq 0$.
Étudier les variations de h et en déduire le signe de h.

12. Déterminer les variations de f et donner l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 2 - Nombres de Mersenne, nombres de Fermat

Soit a et n deux entiers naturels supérieurs à 2.

1. Rappeler la formule de factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.

2. Lorsque $n = pq$, démontrer que $a^p - 1$ divise $a^n - 1$.

3. En déduire que, si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est un nombre premier.

   Remarque – Pour $p \geq 2$, on note $M_p = 2^p - 1$ le p-ième nombre de Mersenne.
   Le plus grand nombre premier connu est $M_{82\ 589\ 933}$, découvert le 7 décembre 2018 ; il s'écrit avec 24 862 048 chiffres en base 10.

4. Que déduire de la factorisation du 1) pour n impair et $b = -1$?

5. Montrer que, si $2^n + 1$ est un nombre premier, alors n est une puissance de 2.

   Remarque – Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$ est le n-ième nombre de Fermat.
   Fermat pensait que tous ses nombres étaient premiers. C'est effectivement le cas pour F_i avec $i \in [\![0, 4]\!]$. Euler a prouvé en 1732 que F_5 est composé. On n'a trouvé, à ce jour, aucun autre nombre premier parmi les nombres de Fermat.

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_{n+1} = 2 + F_0 F_1 \dots F_n$.

7. En déduire que, pour tout $m \neq n$, F_n et F_m sont des entiers premiers entre eux.

Exercice 3

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.
Pour chaque entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère l'équation d'inconnue x :

$$(E_n) \quad : \qquad g(x) = n$$

1. a) Dresser le tableau des variations de g en précisant les limites aux bornes.

   b) Montrer que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions, l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n.

2. Dans cette question on note $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite ainsi définie :

$$\begin{cases} & u_0 = -1 \\ \forall k \in \mathbb{N} & u_{k+1} = e^{u_k} - 2 \end{cases}$$

   a) On rappelle que α_2 est le réel strictement négatif obtenu à la question 1b) lorsque $n = 2$. Calculer $g(-1)$ et $g(-2)$ puis montrer que $-2 \leq \alpha_2 \leq -1$.

   b) Justifier que $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$.
   En déduire par récurrence sur k que pour tout entier naturel :

$$\alpha_2 \leq u_k \leq -1$$

   c) En mettant en oeuvre le théorème de croissance de l'intégrale avec des fonctions adéquates, montrer que pour tous réels a et b tels que $a \leq b \leq -1$:

$$0 \leq e^b - e^a \leq \frac{1}{e}(b-a)$$

   d) Montrer que pour tout entier naturel k, $u_{k+1} - \alpha_2 = e^{u_k} - e^{\alpha_2}$. En déduire par récurrence sur k que pour tout entier naturel k :

$$0 \leq u_k - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^k$$

   e) Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite α_2.

   f) On considère le programme Turbo-Pascal suivant : (où `TRUNC` appliquée à une nombre positif désigne la fonction partie entière)

```
def suite(epsilon):
    N=int(-np.log(epsilon))+1
    u=-1
    for k in range(1,N+1):
        ...
    return u
```

   Montrer que l'entier naturel N calculé dans ce programme vérifie :

$$\left(\frac{1}{e}\right)^N \leq \varepsilon$$

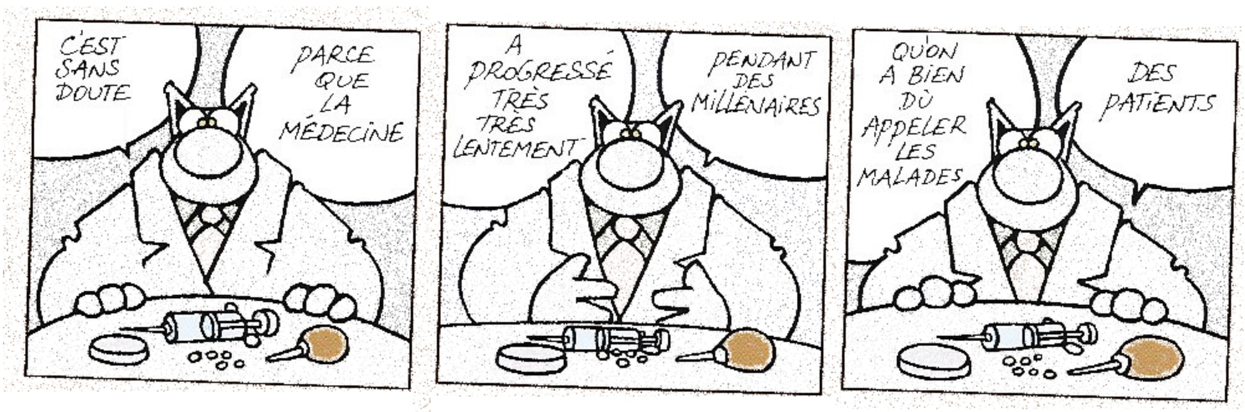
   Compléter la partie pointillée de ce programme afin que la variable `u` contienne après son exécution une valeur approchée de α_2 à ε près.

3. On revient au cas général où $n \geq 2$.

   a) Montrer que $1 \leq g(\ln(n)) \leq n$.
   En déduire $g(\ln(2n)) \geq n$. *On donne* $\ln(2) \simeq 0,69$.

   b) En déduire que $\ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n)$. Puis établir

$$\beta_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$



Proposition de corrigé du devoir surveillé 7

Problème 1 - Introduction à la formule de Taylor-Lagrange

Partie A - Étude des fonctions ch et sh

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et

$$\mathrm{ch}(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \mathrm{ch}(x) \text{ et } \mathrm{sh}(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = -\mathrm{sh}(x)$$

Ainsi $\boxed{\text{ch est paire et sh est impaire}}$.

b) L'application sh est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{sh}'(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x) > 0 \text{ car } \exp > 0$$

$$\mathrm{sh}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x}-e^{-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Le tableau de variations et de signes de sh est

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$		$+$	0	$+$	
$\mathrm{sh}(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$\mathrm{sh}(x)$		$-$	0	$+$	

c) L'application ch est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$$

On peut déduire de A1b) le tableau de variations de ch :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

avec $\mathrm{ch}(0) = \dfrac{e^{0}+e^{0}}{2} = 1$.

d) Par opérations algébriques sur les limites (pas de FI), on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} = +\infty$.

$$\frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2x} = \frac{e^{x}}{x}\,\frac{1-e^{-2x}}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{par } \underline{\text{croissance comparée}}$$

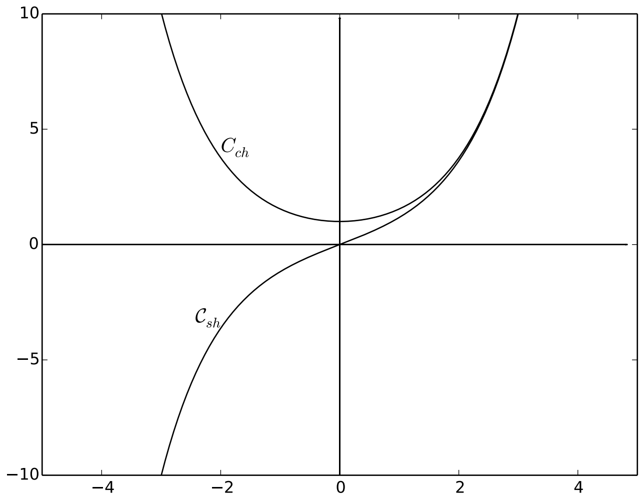
Ainsi $\boxed{\text{la courbe de sh admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en } +\infty}$.

e) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} - \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = e^{-x} > 0$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) > \mathrm{sh}(x) \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty}\big(\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\big) = 0}$.

On en déduit $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{ch} = +\infty$. De plus, comme ch est paire, $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{ch} = +\infty$; et comme sh est impaire, $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{sh} = -\infty$.



2. a) L'application sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{sh réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}}$.

   b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

   Ainsi , $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1}$.

   c) Comme sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch} > 0$ alors d'après le théorème sur la dérivabilité des fonctions réciproques : $\boxed{\text{Argsh est dérivable sur } \mathbb{R}}$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{Argsh}(x))} = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}(x))}$$

   Or $\mathrm{ch} > 0$ donc d'après A2b), $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(t) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(t)}$.

$$\mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(\mathrm{Argsh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

   Ainsi, $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$.

3. a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x^2 < 1 + x^2 \quad &\Rightarrow \quad |x| < \sqrt{1+x^2} \text{ car } t \mapsto \sqrt{t} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &\Rightarrow \quad -\sqrt{1+x^2} < -|x| \leq x \leq |x| < \sqrt{1+x^2} \\ &\Rightarrow \quad 0 < x + \sqrt{1+x^2} \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x + \sqrt{1+x^2} > 0}$.

   b) L'application $x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $[1, +\infty[$. De plus, $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; par composition d'applications dérivables, $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Comme $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; par somme d'applications dérivables, $x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeur sur $[1, +\infty[$.

Comme ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition d'applications dérivables, $\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = \frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ainsi, $\boxed{\varphi' = \mathrm{Argsh}'}$.

c) D'après A3b), il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \mathrm{Argsh} + c$. Or pour $x = 0$ on obtient $\varphi(0) = 0$ et $\mathrm{Argsh}(0) = 0$ donc $c = 0$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Argsh} = \varphi}$.

Partie B - Une application du théorème de Rolle

4. Pour a, b fixés et $t = b$, la relation est une équation affine en K. On trouve, avec $b - a \neq 0$:

$$\boxed{K = \frac{g(b) - g(a) - g'(a)(b-a)}{(b-a)^2}}$$

5. Comme g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et $t \mapsto -g(a) - g'(a)(t-a) - K(t-a)^2$ est un polynôme donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$; alors par somme d'applications de classe $\mathcal{C}^2$, ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$.
On a donc ψ continue et dérivable sur $[a,b]$ et $\psi(a) = 0 = \psi(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\psi'(c) = 0$.
Or $\psi'(t) = g'(t) - g'(a) - 2K(t-a)$ donc $\psi'(a) = 0$. Comme ψ est aussi continue et dérivable sur $[a,c]$, alors d'après le théorème de Rolle, $\boxed{\text{il existe } d \in]a,c[\subset]a,b[\text{ tel que } \psi''(d) = 0}$.

6. Une autre expression de ψ'' est :

$$\forall t \in [a,b],\ \psi''(t) = g''(t) - 2K$$

Or, d'après B2), $\psi''(d) = 0$ équivaut à $K = \dfrac{g''(d)}{2}$. Ainsi, d'après B1) et B2), $\psi(b) = 0$ donne :
$\boxed{\text{il existe } d \in]a,b[\text{ tel que } g(b) = g(a) + (b-a)g'(a) + \dfrac{(b-a)^2}{2}g''(d)}$.

Partie C - Étude de la fonction f

7. Soit $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et

$$f(-x) = \frac{-x}{\mathrm{sh}(-x)} = \frac{-x}{-\mathrm{sh}(x)} = \frac{x}{\mathrm{sh}(x)} = f(x)$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est paire}}$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \frac{x}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{2}{\frac{e^x-1+1-e^{-x}}{x}} = \frac{2}{\frac{e^x-1}{x} + \frac{1-e^{-x}}{x}}$$

Or $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$; comme $\lim\limits_{x\to 0} -x = 0$, par composition de limites on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{x} = 1$.

$$f(x) = \frac{2}{\frac{e^x-1}{x} + \frac{1-e^{-x}}{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{2}{1+1} = 1 = f(0)$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$.

9. a) L'application exp est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Comme $x \mapsto -x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$, par composition d'applications de classe $\mathcal{C}^2$, $x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Par combinaison linéaire d'applications de classe $\mathcal{C}^2$, sh est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, considérant la question B2), discutons suivant deux cas :
   - soit $x > 0$: sh est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, x]$, alors il existe $d \in]0, x[$ tel que
$$\mathrm{sh}(x) = \mathrm{sh}(0) + (x-0)\mathrm{sh}'(0) + \frac{(x-0)^2}{2}\mathrm{sh}''(d) = x + \frac{x^2}{2}\mathrm{sh}(d)$$
   - soit $x < 0$: comme sh est impaire, $\mathrm{sh}(x) = -\mathrm{sh}(-x)$ avec $-x > 0$.
D'après ce qui précède, il existe $d_{-x} \in [0, -x]$ tel que
$$\mathrm{sh}(-x) = -x + \frac{(-x)^2}{2}\mathrm{sh}(d_{-x}) \text{ et donc } \mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^2}{2}\mathrm{sh}(-d_{-x}) \text{ avec } -d_{-x} \in [x, 0]$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour } x \neq 0, \text{ il existe } d_x \text{ entre } 0 \text{ et } x \text{ tel que } \mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^2}{2}\mathrm{sh}(d_x)}$.

b) Pour $x = 0$ l'inégalité est vraie $(0 \leq 0)$.
Pour $x \neq 0$, $\forall t \in [-|x|, |x|]$, $|\mathrm{sh}(t)| \leq \mathrm{sh}(|x|) = |\mathrm{sh}(x)|$, et d'après C3a), il existe d_x entre 0 et x tel que
$$|\mathrm{sh}(x) - x| = \frac{x^2}{2}\,|\mathrm{sh}(d_x)| \leq \frac{x^2}{2}\,|\mathrm{sh}(x)|$$
Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\mathrm{sh}(x) - x\right| \leq \frac{x^2}{2}|\mathrm{sh}(x)|}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$,
$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \left|\frac{\frac{x}{\mathrm{sh}(x)} - 1}{x}\right| = \left|\frac{x - \mathrm{sh}(x)}{x\mathrm{sh}(x)}\right| \leq \left|\frac{x^2\mathrm{sh}(x)}{2x\mathrm{sh}(x)}\right| = \frac{|x|}{2}$$
Or $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{2} = 0$, donc par <u>encadrement</u>, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.
Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0}$.

10. On sait déjà que sh est de classe $\mathcal{C}^2$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Comme $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors par quotient d'applications dérivables, on obtient que f est dérivable $\mathbb{R}^*$. De plus, f est continue et dérivable en 0, d'après C2) et C3c), donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.
Pour $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f'(x) = \frac{1 \times \mathrm{sh}(x) - x\mathrm{sh}'(x)}{\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{\mathrm{sh}(x) - x\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2(x)}$$
Ainsi $\boxed{\begin{array}{cccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}(x) - x\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}}$.

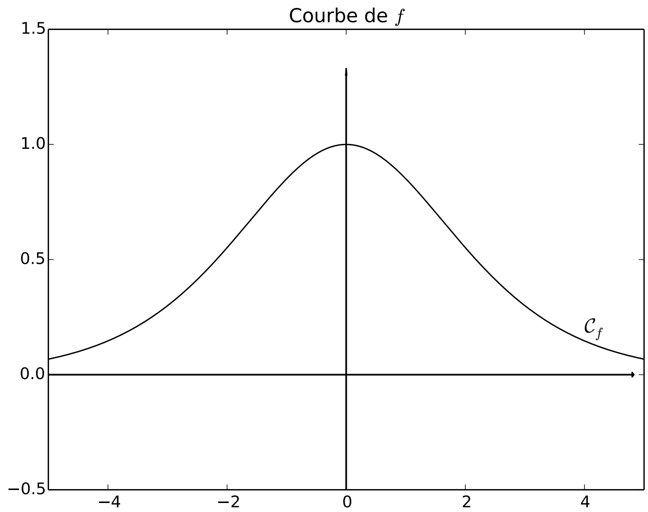
11. L'application h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$: $h'(x) = \mathrm{ch}(x) - \mathrm{ch}(x) - x\mathrm{sh}(x) = -x\mathrm{sh}(x)$.
Un tableau de signes/variations/signes donne :

x	0		$+\infty$
$-x$	0	$-$	
$\mathrm{sh}(x)$	0	$+$	
$h'(x)$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	
$h(x)$	0	$-$	

12. Comme $\text{sh}^2 \leq 0$, la tableau de variations de f (qui est paire) est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

Étudions la branche infinie de f en $+\infty$: on a déjà vu en A1d) que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{sh}(x)}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. La courbe de f admet en $+\infty$ une droite asymptote d'équation $y = 0$. Les variations de f donnent que la courbe reste au dessus de l'asymptote. La parité donne le comportement en $-\infty$.



Exercice 2

1. Formule du cours :
$$\boxed{\text{Pour } a,b\in\mathbb{Z} \text{ et } n\in\mathbb{N},\ a^n-b^n=\big(a-b\big)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}\right)=\big(a-b\big)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k.}$$

2. La question précédente donne que $a-b$ divise a^n-b^n dans $\mathbb{Z}$.
Soit $n=pq$, alors $a^n-1=(a^p)^q-1^q$. D'après le résultat précédent pour la puissance q entre a^p et 1, on obtient que $\boxed{a^p-1 \text{ divise } a^n-1.}$

3. Raisonnons par contraposition. La négation de "$a=2$ et n est un nombre premier" est "$a\neq 2$ ou n est composé". Procédons par disjonction de cas :
   - Si n est composé, la question précédent donne que a^n-1 est composé.
   - Si $a\neq 2$, alors $a>2$ et donc $a-1$ est un diviseur de a^n-1 différent de a^n-1 et de 1 donc a^n-1 est pair donc composé.

   Dans tous les cas a^n-1 est composé.
   Ainsi, $\boxed{\text{si } a^n-1 \text{ est premier, alors } a=2 \text{ et } n \text{ est un nombre premier.}}$

4. Si n est impair et $b=-1$, la factorisation en 1 peut s'écrire :
$$\big(a+1\big)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}(-1)^k=a^n-(-1)^n=a^n+(-1)^{2n}=a^n+1$$
   Ainsi, $\boxed{\text{les nombres de la forme } a^n+1 \text{ avec } n \text{ impair sont composées.}}$

5. Procédons par contraposition : supposons qu'il existe q un nombre impair et $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=2^kq$,
$$2^n+1=\left(2^{2^k}\right)^q+1$$
   D'après la question précédente, 2^n+1 est donc composé.
   Ainsi, $\boxed{\text{si } 2^n+1 \text{ est un nombre premier, alors } n \text{ est une puissance de 2.}}$

6. Procédons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$:
   - Initialisation : $F_0=2^{2^0}+1=2^1+1=3$ et $F_1=2^{2^1}+1=2^2+1=5=2+F_0$
   - Hérédité : Soit $n\geq 0$, on suppose que $F_{n+1}=2+F_0F_1\dots F_n$
$$\begin{aligned}2+F_0F_1\dots F_nF_{n+1}&=2+(F_0F_1\dots F_n+-2)F_{n+1}\\&=2+(F_{n+1}-2)F_{n+1}=2+\left(2^{2^{n+1}}+1-2\right)\left(2^{2^{n+1}}+1\right)\\&=2+\left(2^{2^{n+1}}-1\right)\left(2^{2^{n+1}}+1\right)=2+\left(2^{2^{n+1}}\right)^2-1^2\\&=2^{2^{n+2}}+1=F_{n+2}\end{aligned}$$
   - Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\quad F_{n+1}=2+F_0F_1\dots F_n.}$

7. Soit $n,m\in\mathbb{N}$ avec $n<m$ alors, d'après ce qui précède, on a la relation
$$F_m=2+F_0F_1\dots F_n\dots F_{m-1}$$
   donc les diviseurs communs à F_m et F_n divisent 2, en particulier $F_n\wedge F_m \mid 2$.
   Or F_n est impaire donc F_n et F_m sont premiers entre eux.
   Ainsi, $\boxed{\text{les nombres de Fermat sont premiers entre eux deux à deux.}}$

Exercice 3

1. a) La fonction g est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^x - 1$$

La dérivée est une fonction strictement croissante, nulle pour $x = 0$.
De plus, $\lim\limits_{-\infty} g = \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $x \underset{+\infty}{=} o(e^x)$ donc $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$.
Le tableau de variation de g est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

b) La fonction g est continue, strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur $g(\mathbb{R}_-) = [1, +\infty[$.
Or $n \in [1, +\infty[$ puisque $n \geq 2$, ainsi n admet un unique antécédent par g, autrement dit, l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_-$: $\alpha_n < 0$.

De même, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $g(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[\ni n$, ainsi l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$: $\beta_n > 0$.

2. a) Calculons :

$$g(-1) = e^{-1} - (-1) < e^0 + 1 = 2 \text{ et } g(-2) = e^{-2} - (-2) > -(-2) = 2$$

Nous en déduisons que $g(-1) < 2 < g(-2)$. g étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 2$ admet une solution dans $]-2, -1[$. Cette solution est nécessairement l'unique solution négative de (E_2), ainsi $\boxed{-2 \leq \alpha_2 \leq -1}$

b) Par construction : $g(\alpha_2) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\alpha_2} - \alpha_2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$
La dernière équivalence est obtenue en retranchant $\alpha_2 - 2$ aux deux membres de l'égalité.

Démontrons par récurrence sur k : $\alpha_2 \leq u_k \leq -1$

- Initialisation : Pour $k = 0$, nous avons démontré que $-2 \leq \alpha_2 \leq -1$.
  Comme $u_0 = -1$, nous avons bien $\alpha_2 \leq u_0 \leq -1$.
- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $\alpha_2 \leq u_k \leq -1$.

  La fonction $h : x \mapsto e^x - 2$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc

$$\alpha_2 \leq u_k \leq -1 \quad \Rightarrow \quad e^{\alpha_2} - 2 \leq h(u_k) \leq \underbrace{e^{-1} - 2}_{\leq e^0 - 2 = -1} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 \leq u_{k+1} \leq -1$$

  La relation est vrai au rang $k + 1$.
- Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} : \ \alpha_2 \leq u_k \leq -1}$

c) Soient a et b deux réels tels que $a \leq b \leq -1$.

$$\forall x \in [a, b], \quad 0 \leq e^x \leq e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Considérant cette comparaison d'applications continues, le théorème de croissance de l'intégrale donne :

$$\int_a^b 0 \mathrm{d}x \leq \int_a^b e^x \mathrm{d}x \leq \int_a^b \frac{1}{e} \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \boxed{e^b - e^a \leq \frac{1}{e}(b - a)}$$

d) Soit $k \in \mathbb{N}$, par définition on a $u_{k+1} = e^{u_k} - 2$ et d'après 2b) $\alpha_2 = e^{\alpha_2} - 2$ donc

$$u_{k+1} - \alpha_2 = e^{u_k} - e^{\alpha_2}$$

Démontrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_k - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^k$.

- Initialisation : Pour $k = 0$, $u_0 = -1$. Nous avons démontré que

$$-2 \leq \alpha_2 \leq -1 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq -\alpha_2 \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq u_0 - \alpha_2 \leq 1$$

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $0 \leq u_k - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^k$.
  D'après 2b) $\alpha_2 \leq u_k \leq -1$, ainsi l'inégalité obtenue en 2c) et l'hypothèse de récurrence donnent :

$$0 \leq u_{k+1} - \alpha_2 = e^{u_k} - e^{\alpha_2} \leq \frac{1}{e}(u_k - \alpha_2) \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{k+1}$$

- Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_k - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^k}$

e) Or $0 < \frac{1}{e} < 1$ donc $\left(\frac{1}{e}\right)^k \to 0$.

D'après le théorème des gendarmes, nous en déduisons que $\boxed{(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha_2.}$

f) Le programme complété est :

```
def suite(epsilon):
    N=int(-np.log(epsilon))+1
    u=-1
    for k in range(1,N+1):
        u=np.exp(u)-2
    return u
```

Relation vérifiée par l'entier N : pour ε petit ($\varepsilon \in]0,1[$) $-\ln\varepsilon > 0$.

$$N = \lfloor -\ln\varepsilon \rfloor + 1 \quad \Rightarrow \quad N \geq -\ln\varepsilon \quad \Rightarrow \quad N \ln\frac{1}{e} \leq \ln\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{e}\right)^N \leq \varepsilon$$

La dernière implication résulte de la croissance de exp.
D'après la question 2e),

$$0 \leq u_k - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^k$$

u_k est donc une valeur approchée de α_2 à ε près pour $k = N$. Le programme calcule successivement dans la variable `u`, les termes de la suite (u_k) jusqu'à u_N.
Ainsi, à la fin de l'exécution du programme, $\boxed{\texttt{u} \text{ contient une approximation de } \alpha_2 \text{ à } \varepsilon \text{ près.}}$

3. On revient au cas général où $n \geq 2$.

a) On se rappelle le tableau de variation de $g : x \mapsto e^x - x$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit $1 \leq g(\ln(n))$ et $g(\ln(n)) = e^{\ln(n)} - \ln(n) = n - \ln(n) \leq n$.
On a donc bien vérifié :

$$1 \leq g(\ln n) \leq n$$

Pour établir $g(\ln(2n)) = 2n - \ln(2n) \geq n$, il suffit de montrer que $n - \ln(2n) \geq 0$.

$$\begin{aligned} 1 \leq g(\ln n) = n - \ln n \quad & \Rightarrow \quad \ln n \leq n - 1 \\ & \Rightarrow \quad \ln 2 + \ln n \leq n - 1 + \ln 2 \leq n \text{ car } \ln 2 < 1 \\ & \Rightarrow \quad \ln(2n) \leq n \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{g(\ln(2n)) \geq n.}$

b) D'après la question précédente $g(\ln(n)) \leq n \leq g(\ln(2n))$. La continuité de g et le théorème de valeur intermédiaires donne que $(E_n) : g(x) = n$ possède une solution dans $[\ln(n), \ln(2n)]$. Or β_n est l'unique solution de (E_n) sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n)$$

Or $\ln(2n) = \ln(2) + \ln(n) \sim \ln(n)$. D'après le corollaire d'encadrement $\boxed{\beta_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)}$.