DS 8

Mercredi 7 février 2024 – durée 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercices 1 - Questions courtes

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{E}_1 \quad 44x \equiv 3\ [31] \qquad\qquad \mathcal{E}_2 \quad 63x \equiv 4\ [14]$$

2. a) Déterminer en appliquant l'algorithme d'Euclide étendu un couple d'entier $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$$7u + 12v = 1$$

   b) En déduire un couple d'entiers $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $7u_0 + 12v_0 = 100$

   c) Montrer que les solutions de l'équation d'inconnue $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$:

$$7p + 12q = 100 \qquad (\bigstar)$$

   sont de la forme $(u_0 + 12k, v_0 - 7k)$, $\quad k \in \mathbb{Z}$.

   d) En déduire toutes les solutions de l'équation $(\bigstar)$ d'inconnue $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

3. Calculer un développement limité d'ordre 2 en 0 de :

$$g(x) = \frac{1 - \sqrt{\cos(x)}}{x^2\,(1 + x^2)}$$

4. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

   a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

   b) Lorsque $x > 0$, en écrivant :

$$f(x) = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$$

   et en calculant un développement limité de φ en 0, démontrer que $\mathcal{C}_f$ a une asymptote en $+\infty$

   c) Identifier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote lorsque $x \to +\infty$.

   d) Que se passe-t-il lorsque $x \to -\infty$?

Exercices 2 - Sur les matrices

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices carrées d'ordre 3 qui vérifient la propriété suivante :

une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{E}$ si :

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$$

On note $s(A)$ la valeur commune de ces six sommes.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 3 et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que I et J appartiennent à $\mathcal{E}$ et donner les valeurs $s(I)$ et $s(J)$.

2. Soit a et b deux réels et K la matrice définie par : $K = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -2 & 5 & 3 \\ a & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

   Déterminer les réels a et b pour que K soit une matrice de $\mathcal{E}$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & d & x \\ b & e & y \\ c & z & t \end{pmatrix}$.

   Déterminer x, y, z, t en fonction de a, b, c, d, e pour que M soit une matrice de $\mathcal{E}$.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.

   a) Calculer AJ et JA.

   b) Montrer que A appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si $AJ = JA$.

   c) Vérifier que si A appartient à $\mathcal{E}$, alors $AJ = s(A)J$.

5. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{E}$.

   a) Montrer que le produit AB appartient à $\mathcal{E}$.

   b) Établir l'égalité : $s(AB) = s(A)S(B)$.

6. Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathcal{E}$. On note A^{-1} la matrice inverse de A.

   a) À l'aide de la question 4.b), montrer que A^{-1} appartient à $\mathcal{E}$.

   b) Montrer que $s(A) \neq 0$. Exprimer $s\left(A^{-1}\right)$ en fonction de $s(A)$.

7. Soit A une matrice de $\mathcal{E}$. On pose $B = \dfrac{1}{3}s(A)J$ et $C = A - B$.

   On note $\mathcal{F}$ le sous-ensemble des matrices M de $\mathcal{E}$ vérifiant $s(M) = 0$.

   a) Montrer que B appartient à $\mathcal{E}$.

   b) Montrer que : $BC = CB = 0$ (matrice nulle).

   c) En déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la formule : $(A - B)^n = A^n - B^n$.

   d) La matrice C appartient-elle à $\mathcal{F}$?

   e) En déduire que toute matrice A de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme somme d'une matrice proportionnelle à J et d'une matrice de $\mathcal{F}$

Exercices 3 - Polynômes réciproques

1. Exprimer $X^2+\frac{1}{X^2}$ sous la forme d'un polynôme en $X+\frac{1}{X}$, autrement dit , trouver a, b et $c \in \mathbb{R}$ tel que :
$$X^2+\frac{1}{X^2}=a\left(X+\frac{1}{X}\right)^2+b\left(X+\frac{1}{X}\right)+c$$

2. Généralisation : montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X^n+\frac{1}{X^n}$ s'écrit comme un polynôme de degré n en U avec $U=X+\frac{1}{X}$.

On dit qu'un polynôme $P=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$ est réciproque si
$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_{n-k}=a_k$$

Exemple : $R=2X^5-X^4+X^3+X^2-X+2$, $Q=X^4-2X^3+5X^2-2X+1$

On pourra tester les questions 3), 4), 6c) sur R et Q.

3. Montrer qu'un polynôme P, de degré n, est réciproque si et seulement si $X^nP\left(\frac{1}{X}\right)=P(X)$.

Notons $\mathcal{E}$ l'équation $P(x)=0$ avec P réciproque.

4. Montrer que si P est de degré impair alors -1 est racine de $\mathcal{E}$.
5. Soit z une racine non nulle de $\mathcal{E}$. Montrer que $\frac{1}{z}$ est racine de $\mathcal{E}$.
6. On pose p la multiplicité de -1 dans P : on peut écrire $P=(X+1)^pQ$ avec $Q(-1)\neq 0$.
   a) Montrer que Q est réciproque.
   b) Montrer que Q est de degré pair.
   c) Montrer que le changement de variable $U=X+\frac{1}{X}$ permet de ramener l'équation $Q=0$ à une équation polynomiale de degré plus petit.
7. Résoudre l'équation $x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1=0$

Exercices 4 - Sur les polynômes

On considère l'ensemble E des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad P(x)>0 \text{ et } P'(x)>0$$

1. Donner un exemple d'élément de E.
2. Montrer que E est stable par multiplication par un réel strictement positif, par addition et par multiplication, c'est-à-dire, pour tout $\alpha \in]0,+\infty[$ et tous $P, Q \in E$, on a :
$$\alpha P \in E, \qquad P+Q \in E, \qquad PQ \in E$$
3. Soit $P \in E$. On note $P_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \int_0^x P(t)\mathrm{d}t$.
   Montrer que $P_1 \in E$.

4. Soit $P \in E$. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $P(x) \geq P(0)$.

Pour tout $P \in E$, on note $\widetilde{P} : [0, +\infty[\longrightarrow [P(0), +\infty[, \ x \longmapsto P(x)$.

5. Montre que l'application $\widetilde{P}$ est bijective.

6. Si, de plus, P est de degré au moins deux, est-ce que l'application réciproque $\widetilde{P}^{-1}$ de $\widetilde{P}$ est une une application polynômiale ?

Problème 5 - Développement asymptotique de la série harmonique

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ appelée série harmonique et définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Partie A

On se propose de montrer que $\boxed{(1) \ : \ S_n = \ln(n) + o\big(\ln(n)\big).}$

1. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :
$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}.$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n).$$

3. En déduire que $S_n \sim \ln(n)$ puis établir la relation (1).

Partie B

On souhaite maintenant montrer l'existence d'une constante $\gamma \geq 0$ telle que :
$$\boxed{(2) \ : \ S_n = \ln(n) + \gamma + o(1).}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = S_n - \ln(n)$.
   a) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   b) En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite (γ est appelée constante d'Euler).
   c) Montrer que $\gamma \geq 0$ et établir la relation (2).

5. On veut obtenir une valeur approchée de γ.
   a) Soit $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p \leq n$. Montrer que :
   $$0 \leq T_p - T_n \leq \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
   b) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$0 \leq T_p - \gamma \leq \frac{1}{p}.$$
   c) Établir l'algorithme d'un programme qui donne une valeur approchée de γ à ε près, où $\varepsilon > 0$ est entré par l'utilisateur.
   d) L'ordinateur donne $T_{1000} = 0,5777151$. Conclusion ?

Partie C

On veut enfin montrer que : $\boxed{(3) \ : \ S_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$

6. On rappelle que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a :
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x).$$
Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a :
$$\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

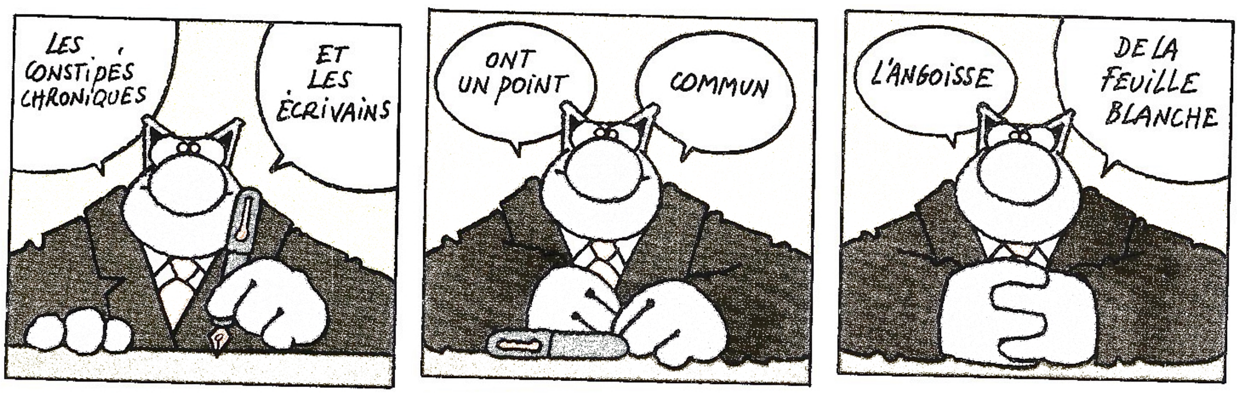
7. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{2k^2(k+1)} \leq T_k - T_{k+1} \leq \frac{1}{2k(k+1)} + \frac{1}{3k^3(k+1)}.$$

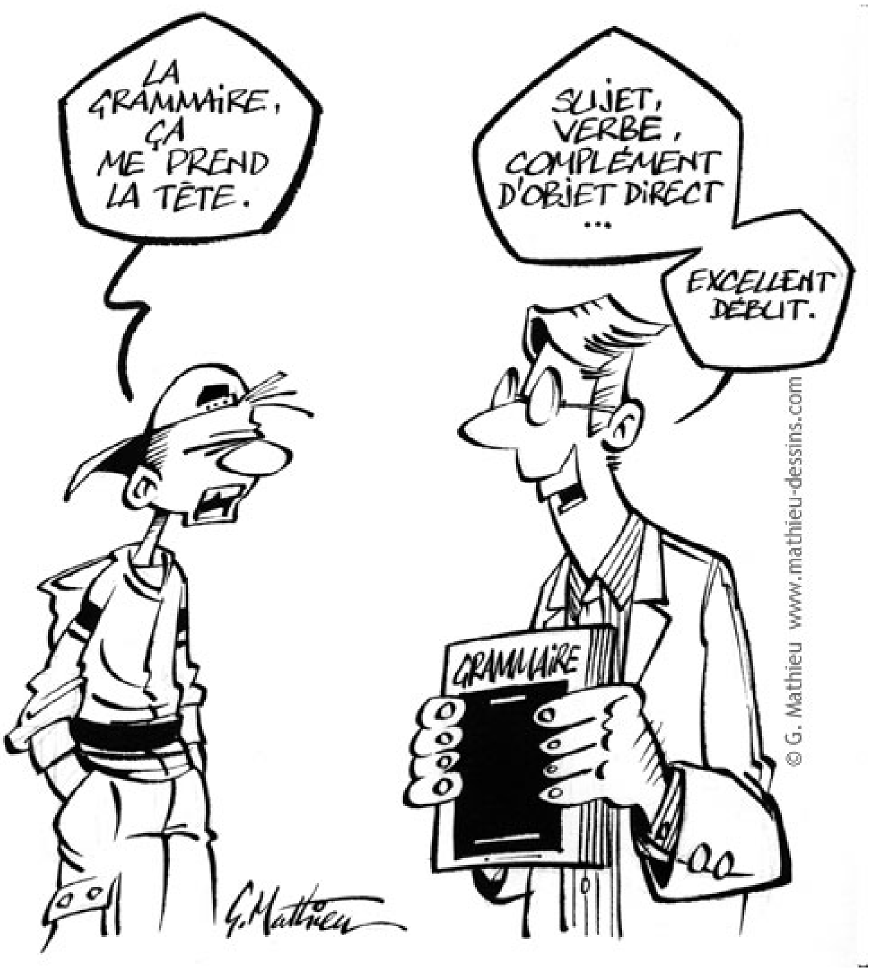
8. Soit $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p < n$. On pose :
$$A_p(n) = \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{2k(k+1)}.$$
a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.
b) En déduire une expression simple de $A_p(n)$.
c) Montrer que $A_p(n)$ converge vers $\dfrac{1}{2p}$ lorsque $n \to +\infty$.

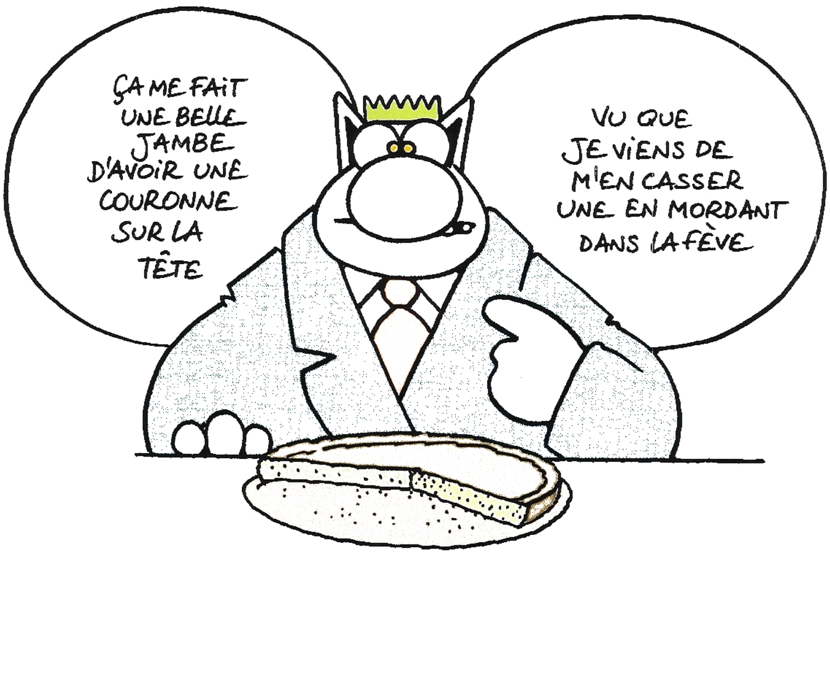
9. Montrer que pour tout $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p < n$, on a :
$$A_p(n) - \frac{1}{p}A_p(n) \leq T_p - T_n \leq A_p(n) + \frac{2}{3p^2}A_p(n).$$
En déduire un encadrement de $T_p - \gamma$.

10. Montrer que $2p(T_p - \gamma)$ converge lorsque $p \to +\infty$ et donner sa limite. En déduire un équivalent simple de $T_p - \gamma$ lorsque $p \to +\infty$ puis établir (3).

FIN DE L'ÉNONCÉ




LA GRAMMAIRE, ÇA ME PREND LA TÊTE.
SUJET, VERBE, COMPLÉMENT D'OBJET DIRECT ...
EXCELLENT DÉBUT.
GRAMMAIRE
G. Mathieu
© G. Mathieu www.mathieu-dessins.com


ÇA ME FAIT UNE BELLE JAMBE D'AVOIR UNE COURONNE SUR LA TÊTE
VU QUE JE VIENS DE M'EN CASSER UNE EN MORDANT DANS LA FÈVE

Proposition de corrigé du devoir surveillé 8

Exercices 1 - Questions courtes

1. • $\mathcal{E}_1$ $44x \equiv 3\ [31]$ Relation de Bezout du couple $(44, 31)$:

i	q_i	r_i	u_i	v_i
-1	X	44	1	0
0	X	31	0	1
1	1	13	1	-1
2	2	5	-2	3
3	2	3	5	-7
4	1	2	-7	10
5	1	$\boxed{1}$	12	-17
6	2	0	X	X

Ainsi, $12 \times 44 - 17 \times 31 = 1$.
12 est un inverse de 44 modulo 31 donc

$$\mathcal{E}_1 \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv 12 \times 3 \equiv 37 \equiv 5\ [31]$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_{\mathcal{E}_1} = 5 + 31\mathbb{Z}}$

• $\mathcal{E}_2$ $63x \equiv 4\ [14]$ Calcul du PGCD du couple $(63, 14)$:

$$63 \wedge 14 = (63 - 4 \times 14) \wedge 14 = 7 \wedge 14 = 7$$

Or 7 ne divise pas 4 donc $\boxed{\mathcal{E}_2 = \emptyset.}$
En effet, il existe une solution $x \in \mathcal{E}_2$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $63x = 4 + 14k$ ou encore $4 = 7(7x - 2k)$ ou encore $7|4$ ce qui est faux.

2. a) **Identité de Bezout**
Application de l'algorithme d'Euclide étendu sur le couple $(12, 7)$:

$$a = r_0 = 12 \quad b = r_1 = 7 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ r_i = u_i a + v_i b \quad \begin{cases} u_{i+2} = u_i - q_{i+2}u_{i+1} \\ v_{i+2} = v_i - q_{i+2}v_{i+1} \end{cases}$$

q_i	r_i	u_i	v_i
	12	1	0
	7	0	1
1	5	1	-1
1	2	-1	2
2	1	3	-5
1	0		

Ainsi, $\boxed{7 \times (-5) + 12 \times 3 = 1}$

b) **Équation $12p + 7q = 100$: solution particulière**
Il suffit de multiplier par 100 la relation précédente : $\boxed{(u_0, v_0) = (-500, 300).}$

c) **Équation $7p + 12q = 100$: toutes les solutions entières**
Pour $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} 7p + 12q = 100 \quad &\Leftrightarrow \quad 7p + 12q = 7 \times (-500) + 12 \times 300 \\ &\Leftrightarrow \quad 7(p + 500) = 12(300 - q) \end{aligned}$$

D'après le théorème de Gauss ; comme 7 est premier avec 12, 7 divise $12(300 - q)$ si et seulement si 7 divise $300 - q$, donc s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $300 - q = 7k$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} 7p + 12q = 100 \quad &\Leftrightarrow \quad q = 300 - 7k \text{ et } 7(p + 500) = 12 \times 7k \\ &\Leftrightarrow \quad q = 300 - 7k \text{ et } p + 500 = 12k \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation d'inconnue $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$:

$$7p + 12q = 100$$

sont donc de la forme $(-500+12k, 300-7k), \quad k \in \mathbb{Z}$.

d) **Équation $7p+12q=100$: solutions dans $\mathbb{N}^2$**
Les solutions sont des entiers naturels si et seulement il existe un $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{l} 300-7k \geq 0 \\ -500+12k \geq 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} k \leq \dfrac{300}{7} \approx 42.86 \\ k \geq \dfrac{500}{12} \approx 41.67 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} k \leq 42 \\ k \geq 42 \end{array}\right.$$

Ce qui donne $p = -500 + 12 \times 42 = 4$ et $q = 300 - 7 \times 42$.
Ainsi, l'équation a une unique solution dans $\mathbb{N}^2$: $\boxed{(4,6).}$

3. **Développement limité en 0**
Calculons un développement limité d'ordre 2 en 0 de :

$$g(x) = \frac{1-\sqrt{\cos(x)}}{x^2\left(1+x^2\right)}$$

Le dénumérateur équivalent à x^2. Pour obtenir un développement d'ordre 2 de g, il faut considérer un développement d'ordre 4 du numérateur.

$$\begin{aligned}
1-\sqrt{\cos(x)} &\underset{0}{=} 1 - \Bigg(1 \underbrace{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)}_{=u}\Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\underset{0}{=} 1 - \left(1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)\right) \text{ avec } u \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \\
&\underset{0}{=} 1 - \left(1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)^2 + o(x^4)\right) \\
&\underset{0}{=} 1 - \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{1}{8}\frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) \\
&\underset{0}{=} \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{96} + o\left(x^4\right) \\
\frac{1-\sqrt{\cos(x)}}{x^2} &= \frac{1}{4} + \frac{x^2}{96} + o\left(x^2\right) \\
\text{et } \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + o(x^2) \\
\text{donc } g(x) &\underset{0}{=} \left(\frac{1}{4} + \frac{x^2}{96} + o\left(x^2\right)\right)\left(1 - x^2 + o(x^2)\right) \\
&\underset{0}{=} \frac{1}{4} + \frac{x^2}{96} - \frac{x^2}{4} + o\left(x^2\right) \\
&\underset{0}{=} \frac{1}{4} - \frac{23x^2}{96} + o\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{g(x) = \dfrac{1-\sqrt{\cos(x)}}{x^2\left(1+x^2\right)} \underset{0}{=} \dfrac{1}{4} - \dfrac{23x^2}{96} + o\left(x^2\right).}$

4. **Asymptote et position**

a) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R}; x^2 - x + 1 \geq 0 \text{ et } x \neq 0\right\} = \mathbb{R}^*}$$

En effet, le discriminant du trinôme vaut -3, le trinôme est strictement positif.

b) Pour étudier le comportement asymptotique de f en $+\infty$, il convient poser $u = \dfrac{1}{x}$ et de faire un développement *limité* en 0 par rapport à u à un ordre donnant au moins un terme non nul tendant vers 0.
Ici $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ donc un développement limité de φ en 0 à l'ordre 2 devrait convenir avec

$$\begin{aligned} \text{pour } x > 0 \quad & f(x) = x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\exp\left(\frac{1}{x}\right) = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right) \\ \text{en posant :} \quad & \varphi(t) = \sqrt{1 - t + t^2}\exp(t) \end{aligned}$$

φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc admet des développements limités à tout ordre en 0. Si $\varphi(t) \underset{0}{=} a + bt + ct^2 + o\left(t^2\right)$, nous en déduirons :

$$f(x) = x\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Nous en déduirons que $\mathcal{C}_f$ a une asymptote d'équation $y = ax + b$ lorsque $x \to +\infty$.
Si $c \neq 0$, le signe de $\dfrac{c}{x}$ nous donne la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote lorsque $x \to +\infty$. Si $c = 0$, il faudra recalculer le développement limité de φ à un ordre supérieur pour obtenir le prochain terme non nul. Maintenant, calculons :

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - t + t^2} &\underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(-t + t^2\right) - \frac{1}{8}\left(-t + t^2\right)^2 + o(t^2) \\ &\underset{0}{=} 1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} + o(t^2) \\ \exp(t) &\underset{0}{=} 1 + t + \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right) \\ \varphi(t) &\underset{0}{=} \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} + o(t^2)\right)\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)\right) \\ &\underset{0}{=} 1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \\ &\underset{0}{=} 1 + \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} + o(t^2) \\ \text{Ainsi :} \qquad f(x) &= x\varphi\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\underset{\infty}{=} x\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ a donc une asymptote d'équation } y = x + \frac{1}{2} \text{ en } +\infty.}$

c) Comme $\dfrac{3}{8x} > 0$ au voisinage de $+\infty$, $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au dessus de son asymptote lorsque } x \to +\infty.}$

d) L'étude en $-\infty$ peut être menée de la même façon. De façon générale, pour $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = |x|\varphi\left(\frac{1}{x}\right) &\underset{\pm\infty}{=} |x|\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{-\infty}{=} -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ a donc une asymptote d'équation } y = -x - \frac{1}{2} \text{ en } -\infty.}$

Comme $-\dfrac{3}{8x} > 0$ au voisinage de $-\infty$, $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au dessus de son asymptote lorsque } x \to -\infty.}$

Exercices 2 - Sur les matrices

1. La somme des coefficients sur les lignes et les colonnes des matrices I et J sont respectivement égalent 1 et 3.
Ainsi, $\boxed{I, J \in \mathcal{E} \text{ ; de plus } s(I) = 1 \text{ et } s(J) = 3.}$

2. Soit $K = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -2 & 5 & 3 \\ a & -6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

- la deuxième ligne donne : $s(K) = -2 + 5 + 3 = 6$.
- les première et deuxième colonnes et la troisième ligne donne $a - 1 = 6$ et donc $a = 7$.
- la troisième colonne donne $b + 8 = 6$ donc $b = -2$.
- on vérifie sur la première ligne que $1 + a + b = 6$

Ainsi, $\boxed{K = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix} \text{ avec } a = 7 \text{ et } b = -2.}$

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & d & x \\ b & e & y \\ c & z & t \end{pmatrix}$. $M \in \mathcal{E}$ si et seulement si :

$$s(M) = a + b + c =_{(1)} d + e + z =_{(2)} x + y + t =_{(3)} a + d + x =_{(4)} b + e + y =_{(5)} c + z + t$$

Ainsi, $\boxed{\begin{cases} x = b + c - d & (3) \\ y = a + c - e & (4) \\ z = a + b + c - d - e & (1) \\ t = a + b - z = -c + d + e & (5) \end{cases}}$ (On vérifie que (2) est satisfaite)

4. a) Le calcul de AJ et JA donne $\boxed{AJ = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 & y_1 + y_2 + y_3 & y_1 + y_2 + y_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 & z_1 + z_2 + z_3 & z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix}}$

et $\boxed{JA = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 & x_2 + y_2 + z_2 & x_3 + y_3 + z_3 \\ x_1 + y_1 + z_1 & x_2 + y_2 + z_2 & x_3 + y_3 + z_3 \\ x_1 + y_1 + z_1 & x_2 + y_2 + z_2 & x_3 + y_3 + z_3 \end{pmatrix}}$.

b) D'après 4a), $A \in \mathcal{E}$ si et seulement si

$$s(A) = x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = z_1 + z_2 + z_3 = x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = x_3 + y_3 + z_3$$

ce qui est équivalent à $AJ = JA$. Ainsi, $\boxed{A \in \mathcal{E} \text{ si et seulement si } AJ = JA.}$

c) D'après ce qui précède, on obtient que la matrice AJ à tous ses coefficients égaux à $s(A)$ et donc $\boxed{A \in \mathcal{E} \text{ implique } AJ = s(A)J.}$

5. Soit $A, B \in \mathcal{E}$.

a) Considérons $C = AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$. La définition de produit matriciel donne :

$$\forall i, j \in [\![1, 3]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{3} a_{i,k} b_{k,j}$$

- la somme des coefficients sur le i-ème ligne de C est :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3} c_{i,j} &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{i,k}b_{k,j} \\
&\quad \text{permutation des sommes} \\
&= \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{3} a_{i,k}\left(\sum_{j=1}^{3} b_{k,j}\right) \\
&\quad \text{comme } B \in \mathcal{E} \\
&= \sum_{k=1}^{3} a_{i,k}s(B) = s(B)\sum_{k=1}^{3} a_{i,k} \\
&\quad \text{comme } A \in \mathcal{E} \\
&= s(B)s(A)
\end{aligned}$$

- la somme des coefficients sur le j-ème ligne de C est :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} c_{i,j} &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{i,k}b_{k,j} \\
&\quad \text{permutation des sommes} \\
&= \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{3} b_{k,j}\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i,k}\right) \\
&\quad \text{comme } A \in \mathcal{E} \\
&= \sum_{k=1}^{3} b_{k,j}s(A) = s(A)\sum_{k=1}^{3} b_{k,j} = s(A)s(B)
\end{aligned}$$

Donc, la somme des coefficients sur chaque ligne et chaque colonne de AB est invariablement $s(A)s(B)$.
Ainsi, $\boxed{\text{si } A, B \in \mathcal{E}, \text{ alors } AB \in \mathcal{E}.}$

b) D'après ce qui précède, on a trouvé $\boxed{s(AB) = s(A)S(B)}$.

Preuve directe : comme $AB \in \mathcal{E}$ alors $ABJ = s(AB)J$ et

$$ABJ = A(BJ) = As(B)J = s(B)AJ = s(B)s(A)J \quad \text{car } A, B \in \mathcal{E}$$

Ainsi, $s(AB) = s(A)s(B)$.

6. Soit $A \in \mathcal{E} \cap \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$.

a) D'après la question 4.b), on a

$$\begin{aligned}
A \in \mathcal{E} \quad &\Leftrightarrow \quad AJ = JA \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}AJ = A^{-1}JA \quad \Leftrightarrow \quad J = A^{-1}JA \\
&\Leftrightarrow \quad JA^{-1} = A^{-1}J \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} \in \mathcal{E}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{si } A \in \mathcal{E} \cap \mathcal{GL}_3(\mathbb{R}), \text{ alors } A^{-1} \in \mathcal{E}.}$

b) D'après 5.b), comme $AA^{-1} = I_3$ alors

$$s(AA^{-1}) = s(A)s(A^{-1}) = s(I_3) = 1$$

Ainsi, $\boxed{\text{si } A \in \mathcal{E} \cap \mathcal{GL}_3(\mathbb{R}),\ s(A) \neq 0 \text{ et } s(A^{-1}) = \dfrac{1}{s(A)}.}$

7. a) On note que si $M \in \mathcal{E}$ alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha M \in \mathcal{E}$ et $s(\alpha M) = \alpha s(M)$. Il suffit de l'écrire pour établir ce résultat.
Or $J \in \mathcal{E}$ avec $s(J) = 3$.
Ainsi, $\boxed{B = \frac{1}{3}s(A)J \in \mathcal{E} \text{ et } s(B) = s(A).}$

b) Calcul de CB :
$$CB = AB - B^2 = \frac{1}{3}s(A)AJ - \frac{1}{9}s(A)^2J^2$$
Or, d'après 4.c), $AJ = s(A)J$. De plus , $J^2 = 3J$. Il vient :
$$CB = \frac{1}{3}s(A)^2J - \frac{3}{9}s(A)^2J = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$
De même,
$$BC = BA - B^2 = \frac{1}{3}s(A)JA - \frac{1}{3}s(A)^2J$$
Or $A \in \mathcal{E}$, donc $AJ = JA = s(A)J$ d'après 4) d'où le résultat $BC = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
Ainsi, $\boxed{BC = CB = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}$.

c) D'après la question précédente,
$$BC = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \quad \Rightarrow \quad BA = B^2 \text{ et d'autre part } CB = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \quad \Rightarrow \quad AB = B^2$$
Considérons comme préliminaire cette généralisation qui peut être établie par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^nB = B^{n+1} = B^nA \qquad (\bigstar)$$
Montrons par récurrence pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathcal{Q}(n) : (A - B)^n = A^n - B^n$.

- Initialisation : pour $n = 1$: le résultat est immédiat. Donc $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \geq 1$; supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.
$$\begin{aligned} (A-B)^{n+1} &= (A-B)^n(A-B) \\ &\qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (A^n - B^n)(A-B) \\ &= A^{n+1} - A^nB - B^nA + B^{n+1} \\ &\qquad \text{d'après } (\bigstar) \\ &= A^{n+1} - B^{n+1} - B^{n+1} + B^{n+1} \\ &= A^{n+1} - B^{n+1} \end{aligned}$$
Ainsi, $\mathcal{Q}(n+1)$ est vérifiée.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (A-B)^n = A^n - B^n.}$

d) On note que si $M, P \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $M + \lambda P \in \mathcal{E}$ et $s(M + \lambda P) = s(M) + \lambda s(P)$. Il suffit de l'écrire pour établir ce résultat.
Comme $A, B, J \in \mathcal{E}$, alors $C = A - B = A + (-B) \in \mathcal{E}$. De plus
$$s(C) = s(A - B) = s(A) - s(B) = s(A) - \frac{1}{3}s(A)\underbrace{s(J)}_{=3} = s(A) - s(A) = 0$$
Ainsi, $\boxed{\text{la matrice } C = A - B \in \mathcal{F}}$.

e) D'après ce qui précède, pour une matrice $A \in \mathcal{E}$ on a :
$$A = \underbrace{\frac{1}{3}s(A)J}_{\text{proportionnelle à } J} + \underbrace{A - \frac{1}{3}s(A)J}_{\in \mathcal{F}}$$
Ainsi, $\boxed{\forall A \in \mathcal{E}, \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } M \in \mathcal{F}; \ A = \alpha J + M.}$

Exercices 3 - Polynômes réciproques

1. On note que $\left(X+\dfrac{1}{X}\right)^2 = X^2+2+\dfrac{1}{X^2}$. Ainsi, $\boxed{X^2+\dfrac{1}{X^2}=\left(X+\dfrac{1}{X}\right)^2-2.}$

2. Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{P}(n) : \exists P_n\in\mathbb{R}[X];\ P_n\left(X+\frac{1}{X}\right)=X^n+\frac{1}{X^n} \quad \text{et} \quad \deg(P_n)=n$$

- Initialisation : Pour $n=1$, $P_1=X$ et $\deg(P_1)=1$.
  Pour $n=2$, $P_2=X^2-2$ avec $\deg(P_2)=2$. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
- Hérédité : Soit $n\geq 2$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ sont vraies.

$$\begin{aligned}
\left(X+\frac{1}{X}\right)\left(X^n+\frac{1}{X^n}\right) &= X^{n+1}+\frac{1}{X^{n-1}}+X^{n-1}+\frac{1}{X^{n+1}}\\
X^{n+1}+\frac{1}{X^{n+1}} &= \left(X+\frac{1}{X}\right)\left(X^n+\frac{1}{X^n}\right)-\left(X^{n-1}+\frac{1}{X^{n-1}}\right)\\
&\quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= \left(X+\frac{1}{X}\right)P_n\left(X+\frac{1}{X}\right)-P_{n-1}\left(X+\frac{1}{X}\right)
\end{aligned}$$

  Posons $P_{n+1}=XP_n-P_{n-1}$, alors $X^{n+1}+\dfrac{1}{X^{n+1}}=P_{n+1}\left(X+\dfrac{1}{X}\right)$.
  De plus, $\deg(XP_n)=\deg(X)+\deg(P_n)=1+n$ et $\deg(P_{n-1})=n-1$. Comme $n-1\neq n+1$, donc $\deg(P_{n+1})=\max(n+1,n-1)=n+1$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ X^n+\dfrac{1}{X^n} \text{ s'écrit comme un polynôme de degré } n \text{ en } X+\dfrac{1}{X}.}$

3. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré n s'écrivant $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, alors

$$\begin{aligned}
X^nP\left(\frac{1}{X}\right) &= X^n\sum_{k=0}^{n}a_kX^{-k}=\sum_{k=0}^{n}a_kX^{n-k}\\
&\quad \text{changement d'indice } \boxed{j=n-k}\\
&= \sum_{j=0}^{n}a_{n-j}X^j
\end{aligned}$$

Il vient : $\quad P$ est réciproque $\Leftrightarrow \forall k\in[\![0;n]\!]\ a_{n-k}=a_k$
$\Leftrightarrow X^nP\left(\dfrac{1}{X}\right)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}X^j=\sum_{j=0}^{n}a_jX^j=P$

Ainsi, $\boxed{\text{un polynôme } P, \text{ de degré } n, \text{ est réciproque si et seulement si } X^nP\left(\dfrac{1}{X}\right)=P(X).}$

4. Soit P de degré $2n+1$ s'écrivant $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$. Alors

$$\begin{aligned}
P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k X^k \\
&\qquad \text{changement d'indice dans la seconde somme } \boxed{j = 2n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{j=0}^{n+1} a_{2n+1-j} X^{2n+1-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{j=0}^{n+1} a_j X^{2n+1-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(X^k + X^{2n+1-k} \right)
\end{aligned}$$

Évaluons en -1, pour $k \in [\![0; n]\!]$,

$$(-1)^k + (-1)^{2n+1-k} = (-1)^k \big(1 + (-1)^{2n+1-2k}\big) = (-1)^k(1-1) = 0$$

Donc $P(-1) = \sum_{k=0}^{n} a_k \times 0 = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } P \text{ est de degré impair alors } -1 \text{ est racine de } \mathcal{E}.}$

5. Soit z une racine non nulle de $\mathcal{E}$ alors $z^n \neq 0$ et d'après 3) il vient :

$$z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = P(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{si } z \text{ est une racine non nulle de } \mathcal{E}, \text{ alors } \frac{1}{z} \text{ aussi.}}$

6. On pose p la multiplicité de -1 dans P : on peut écrire $P = (X+1)^p Q$ avec $Q(-1) \neq 0$.

a) Notons n le degré de P. On a

$$\begin{aligned}
X^n P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X) \quad &\Leftrightarrow \quad X^n \left(\frac{1}{X} + 1\right)^p Q\left(\frac{1}{X}\right) = (X+1)^p Q \\
&\Leftrightarrow \quad X^{n-p} (1+X)^p Q\left(\frac{1}{X}\right) = (X+1)^p Q \\
&\qquad\qquad \text{comme } (X+1)^p \text{ n'est pas le polynôme nul} \\
&\Leftrightarrow \quad X^{n-p} Q\left(\frac{1}{X}\right) = Q
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{Q \text{ est réciproque.}}$

b) Raisonnons par l'absurde. Supposons que Q est de degré impair. Comme il est réciproque d'après 6a), alors d'après 4) on a $Q(-1) = 0$ ce qui contredit le définition de Q.
Ainsi, $\boxed{Q \text{ est de degré pair.}}$

c) Posons $U = X + \frac{1}{X}$. Notons $2m$ le degré de Q s'écrivant $Q = \sum_{k=0}^{2m} a_k X^k$.

$$\begin{aligned}
Q=\sum_{k=0}^{2m} a_kX^k &= \sum_{k=0}^{m-1} a_kX^k + a_mX^m + \sum_{k=m+1}^{2m} a_kX^k \\
&\qquad \text{changement d'indice dans la seconde somme } \boxed{j=2m-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} a_kX^k + a_mX^m + \sum_{j=0}^{m-1} \underbrace{a_{2m-j}}_{=a_j} X^{2m-j} \\
&= X^m\left(\sum_{k=0}^{m-1} a_kX^{k-m} + a_m + \sum_{j=0}^{m-1} a_jX^{m-j}\right) \\
&= X^m\left(\sum_{k=0}^{m-1} a_k\left(X^{k-m}+X^{m-k}\right) + a_m\right) \\
&\qquad \text{d'après 2) avec les notations des } (P_i) \\
&= X^m\left(\sum_{k=0}^{m-1} a_kP_{m-k}\left(X+\frac{1}{X}\right) + a_m\right)
\end{aligned}$$

Or un polynôme réciproque ne peut s'annuler en 0 car son coefficient constant est égal à son coefficient dominant ! Il vient en posant $u = x + \dfrac{1}{x}$:

$$Q(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=0}^{m-1} a_kP_{m-k}(u)+a_m$$

Comme les (P_i) sont de degrés deux à deux distincts, $\deg\left(\sum_{k=0}^{m-1} a_kP_{m-k}(u)+a_m\right)=m-1$.

On ramène ainsi la recherche des racines de Q de degré $2m$ à la recherche de racines d'un polynôme de degré $m-1$ suivi de trinôme. En effet, pour chaque racine u trouver, il faudra ensuite résoudre :

$$u=x+\frac{1}{x} \quad\Leftrightarrow\quad x^2-ux-1=0$$

Ainsi, $\boxed{\text{le changement de variable } u=x+\frac{1}{x} \text{ permet de "diviser par deux" le degré de l'équation.}}$

7. Résolution de l'équation $P(x)=0$ avec $P=X^5-4X^4+3X^3+3X^2-4X+1$:

- Calcul de l'ordre de multiplicité de -1 dans P : $P(-1)=0$

$$P'=5X^4-16X^3+9X^2+6X-4 \text{ et } P'(-1)\neq 0$$

  On trouve $P=(X+1)Q$ avec $Q=X^4-5X^3+8X^2-5X+1$.

- De plus, $Q=X^2\left(\left(X^2+\dfrac{1}{X^2}\right)-5\left(X+\dfrac{1}{X}\right)+8\right)=X^2\big(P_2(U)-5P_1(U)+8\big)$.

$$Q(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad u^2-2-5u+8=0 \quad\Leftrightarrow\quad u^2-5u+6=0$$

- Le discriminant est $\Delta=25-4\times1\times6=1$. Les racines en u sont $u_1=\dfrac{5-1}{2}=2$ et $u_2=3$.
- Cherchons les racines en x :

$$x+\frac{1}{x}=u_1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-u_1x+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=1$$

$$\text{et } x^2-u_2x+1=0 \qquad \Delta=9-4=5 \qquad x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

On a trouver les cinq racines de P et donc les racines de l'équation : $\boxed{-1; \frac{3-\sqrt{5}}{2}; 1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}.}$

La factorisation de P est $P = (X+1)(X-1)^2 \left(X - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Exercices 4 - Sur les polynômes

1. Le polynôme $\boxed{X^2 \text{ est un élément de } E}$ car pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$ et $2x > 0$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $P, Q \in E$. Pour $x > 0$, on a :
   - $\alpha P(x) > 0$ et $\alpha P'(x) > 0$ comme produits de nombres strictement positifs, donc $\alpha P \in E$;
   - $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) > 0$ et $(P+Q)'(x) = P'(x) + Q'(x) > 0$ comme sommes de termes strictement positifs, donc $P + Q \in E$;
   - De même, par somme et produit de termes strictement positifs,
   $$(PQ)(x) = P(x)Q(x) > 0 \text{ et } (PQ)'(x) = P'(x)Q(x) + P(x)Q'(x) > 0$$
   donc $PQ \in E$.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } \alpha \in]0, +\infty[\text{ et tout } P, Q \in E,\ \alpha P,\ P+Q,\ PQ \in E}$.
3. On remarque que P_1 est la primitive de P s'annulant en 0 : c'est un polynôme. Or $P_1' = P > 0$ sur $\mathbb{R}^*$, donc P_1 y est strictement croissante et donc pour tout $x > 0$, on a $P_1(x) > P_1(0) = 0$.

   Ainsi, $P_1 \in E$.

   ⇛ *On pouvait utiliser la croissance de l'intégrale sur le segment* $[0, x]$.
4. Soit $P \in E$. Sa dérivé étant strictement positive sur $]0, +\infty[$, P est une fonction strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Par conséquent $\boxed{\forall x \in [0, +\infty[\quad P(x) \geq P(0).}$
5. $\tilde{P}$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[P(0), \lim\limits_{x \to +\infty} \tilde{P}(x)[$.

   P étant un polynôme strictement croissant il tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
   Ainsi, $\boxed{\tilde{P} \text{ réalise une bijection de } [0, +\infty[\text{ sur } [P(0), +\infty[.}$
6. $\boxed{\text{La réponse est non}}$: X^2 est élément de E et réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Sa réciproque, la racine carrée, n'est pas polynomiale.

Problème 5 - Développement asymptotique de la série harmonique

Partie A

1. Soit $x > 0$. La fonction ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, x+1]$. De plus,
   $$x \leq t \leq x+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$$
   D'après l'inégalité des accroissements finis,
   $$\frac{1}{x+1} \leq \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{x+1-x} = \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in]0,+\infty[,\ \dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \dfrac{1}{x}.}$

2. Pour $n \geq 2$, l'inégalité précédente donne :

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$$

Par somme des inégalités et simplification téléscopique :

$$\ln(n+1) - \ln(2) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$$

Pour $k = 1$, considérons l'inégalité $0 \leq 1 - \ln(2)$. Par sommation,

$$\ln(n+1) \leq \ln(n+1) + 1 - \ln(2) \leq S_n \leq 1 + \ln(n).$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n).}$

3. En divisant par $\ln(n)$ l'inégalité précédente :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq \frac{1+\ln(n)}{\ln(n)}$$

Comme $\dfrac{1+\ln(n)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} \to 0$ et $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \to 1$

Par encadrement, $\dfrac{S_n}{\ln(n)} \to 1$.

Ainsi, $\boxed{S_n \sim \ln(n) \text{ ou encore } S_n = \ln(n) + o(\ln(n))\ (1).}$

Partie B

11. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_{n+1} - T_n = S_{n+1} - \ln(n+1) - S_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0 \text{ d'après 1)}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après 2 et par croissance du ln,

$$T_n = S_n - \ln(n) \geq \ln(n+1) - \ln(n) \geq 0$$

Ainsi, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée et décroissante.
D'après le <u>théorème de limite monotone</u>, $\boxed{\text{la suite } (T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$

c) Comme (T_n) est positive, par <u>passage à la limite</u>, $\gamma \geq 0$ et $T_n = \gamma + o(1)$.
Ainsi, $\boxed{\gamma \geq 0 \text{ et } S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)\ (2).}$

12. a) Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq n$. (T_n) étant décroissante : $0 \leq T_p - T_n$.

$$T_p - T_n = S_p - \ln(p) - S_n + \ln(n) = -\sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) - \ln(p) \text{ d'après 1)}$$

$$\leq \sum_{k=p+1}^{n} (\ln(k) - \ln(k+1)) + \ln(n) - \ln(p) \text{ par téléscopie}$$

$$\leq \ln(p+1) - \ln(n+1) + \ln(n) - \ln(p) = \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi, $\boxed{\forall (p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } p \leq n,\ 0 \leq T_p - T_n \leq \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).}$

b) Soit $p \geq 1$, comme $T_n \to \gamma$, par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$, il vient :

$$0 \leq T_p - \gamma \leq \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

Or pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \geq x$, ainsi $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq T_p - \gamma \leq \frac{1}{p}.}$

c) Algorithme donne une valeur approchée de γ à ε près, où $\varepsilon > 0$:

Entrée : *eps* la précision

$S \leftarrow 1$
$p \leftarrow 1$
Tant que $\frac{1}{p} > eps$ faire
  $p \leftarrow p+1$
  $S \leftarrow S + \dfrac{1}{p}$
FinTantQue

Sortie : $S - \ln(p)$

En Python, cela donne :

```
import numpy as np
def Const_Euler(eps):
    S,p=1,1
    while 1/p>eps:
        p=p+1
        S=S+1/p
    return(S-np.log(p))
```

d) Considérant $T_{1000} = 0,5777151$. Alors $\boxed{0,5767 \leq \gamma < 0,5778.}$

Partie C

13. On définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g : x \mapsto x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$ de classe $\mathcal{C}^1$:

$$g'(x) = x^2 - x + 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x^3}{1+x} \geq 0$$

Donc g est croissante. Or $g(0) = 0$ donc pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in [0, +\infty[,\ \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.}$

14. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $T_k - T_{k+1} = -\dfrac{1}{k+1} - \ln(k) + \ln(k+1) = -\dfrac{1}{k+1} + \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$

D'après les inégalités de la question précédente, il vient :

$$-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^2 \leq T_k - T_{k+1} \leq -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}\right)^3$$

On a $-\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}\right)^2 - \dfrac{1}{2k(k+1)} + \dfrac{1}{2k^2(k+1)} = \dfrac{-2k^2 + 2k(k+1) - (k+1) - k + 1}{2k^2(k+1)} = 0$

et $\dfrac{1}{2k(k+1)}+\dfrac{1}{3k^3(k+1)}.+\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}\right)^2-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{k}\right)^3=\cdots=\dfrac{k}{6k^3(k+1)}\geq 0$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2k(k+1)}-\dfrac{1}{2k^2(k+1)}\leq T_k-T_{k+1}\leq \dfrac{1}{2k(k+1)}+\dfrac{1}{3k^3(k+1)}.}$

15. a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{k+1-k}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k(k+1)}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}.}$

b) Il vient par simplification téléscopique avec $p,n\in\mathbb{N}^*$ et $p<n$:

$$A_p(n)=\sum_{k=p}^{n-1}\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=p}^{n-1}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2p}-\frac{1}{2n}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } p,n\in\mathbb{N}^* \text{ avec } p<n,\ A_p(n)=\dfrac{1}{2p}-\dfrac{1}{2n}.}$

c) Comme $\dfrac{1}{2n}\to 0$, alors $\boxed{A_p(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{2p}.}$

16. Pour $(p,n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p\leq k<n$:

$$\frac{1}{k}\leq\frac{1}{p}\quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2k^2(k+1)}\geq-\frac{1}{2pk(k+1)}\ \text{ et }\ \frac{1}{3k^3(k+1)}\leq\frac{1}{3p^2k(k+1)}$$

Par sommation des inégalités obtenues en 4 pour $k\in[\![p,n-1]\!]$ et simplification téléscopique :

$$A_p(n)-\frac{1}{p}A_p(n)\leq\sum_{k=p}^{n-1}T_k-T_{k+1}=T_p-T_n\leq A_p(n)+\frac{2}{3p^2}A_p(n)$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } (p,n)\in(\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } p<n,\ A_p(n)-\dfrac{1}{p}A_p(n)\leq T_p-T_n\leq A_p(n)+\dfrac{2}{3p^2}A_p(n).}$

Comme $T_n\to\gamma$ et $A_p(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{2p}$, par passage à la limite lorsque $n\to+\infty$, il vient :

$$\boxed{\frac{1}{2p}-\frac{1}{2p^2}\leq T_p-\gamma\leq\frac{1}{2p}+\frac{1}{3p^3}}$$

17. Il vient pour $p\in\mathbb{N}^*$,

$$1-\frac{1}{p}\leq 2p(T_p-\gamma)\leq 1+\frac{2}{3p^2}$$

Comme $1-\dfrac{1}{p}\to 1$ et $1+\dfrac{2}{3p^2}\to 1$, par <u>encadrement</u>, $\boxed{2p(T_p-\gamma)\to 1}$

Ainsi, $\boxed{T_p-\gamma\sim\dfrac{1}{2p}}$ et donc $S_p-\ln(p)-\gamma=\dfrac{1}{2p}+o\left(\dfrac{1}{p}\right)$ et donc

$$\boxed{(3)\ :\ S_n=\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).}$$