DM 14

à rendre le mardi 6 février 2024

Densité et structure algébrique

Objectif : Montrer que $\left\{ \cos(n);\ n \in \mathbb{N} \right\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

On admet que π est irrationnel.
1. Soit f un fonction continue sur l'intervalle I et A une partie dense dans I.
Montrer que $f(A)$ est dense dans $f(I)$.

2. Montrer que pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

3. Montrons que les sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$, soit dense dans $\mathbb{R}$.
Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent de $\{0\}$.
   a) Justifier que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide est possède une borne inférieure, notée b.
   b) Si $b \in G \cap \mathbb{R}_+^*$, montrer que $G = b\mathbb{Z}$.
   c) Si $b \notin G \cap \mathbb{R}_+^*$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
   d) Conclure.

4. Montrer que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

5. Montrer que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

6. Montrer que $\cos\left(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}\right) = \cos\left(\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}\right) = \cos(\mathbb{N})$.

7. En déduire que le résultat cherché.

8. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe une suite extraite de $\Big(\cos(n)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x.