Corrigé du DM 15

Formule de Cardan et Tartaglia

Partie A - Forme particulière

1. Soit x tel que $x^3 = z$ alors $\left(\frac{x}{w}\right)^3 = \frac{x^3}{w^3} = \frac{z}{z} = 1$
Identifions les racines cubiques de 1 sous forme trigonométrique :

$$(re^{i\theta})^3 = r^3 e^{i3\theta} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta \equiv 0 \ [2\pi] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = 1 \text{ car } t \mapsto t^3 \text{ est une bijection de } \mathbb{R}_+^{\mathbb{R}_+} \\ \theta \equiv 0 \ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$$

Il y a 3 racines cubiques de 1 obtenues par les 3 arguments 2 à 2 distincts à 2π près :

$$1, \quad j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ et } j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3} - 2i\pi} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \bar{j}$$

Ainsi, $\frac{x}{w} \in \{1, j, j^2\}$ ou encore $\boxed{x^3 = z \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{w, jw, j^2 w = \bar{j}w\}.}$

2. Soit z_0 une solution de (E_1). Considérons le trinôme $x^2 - z_0 x - \frac{p}{3}$; il possède deux racines complexes u et v, les relations entre coefficients et racines donnent

$$\boxed{\begin{cases} u + v &= z_0 \\ uv &= -\frac{p}{3} \end{cases}}$$

On trouve immédiatement que $u^3 v^3 = (uv)^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = -\frac{p^3}{27}$.
De plus, z_0 étant une solution de (E_1) alors $u + v$ vérifie :

$$\begin{aligned} (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u^3 + v^3 = -q \text{ car } uv = -\frac{p}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, les relations coefficients-racines donnent que $\boxed{u^3 \text{ et } v^3 \text{ sont racines de } t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0.}$

3. a) Les relations entre coefficients et racines donnent $t_1 t_2 = -\frac{p^3}{27} \neq 0$ car $p \neq 0$.
Ainsi, $\boxed{t_1 \text{ et } t_2 \text{ ne sont pas nulles.}}$
b) Soit u et v des racines cubiques respectives de t_1 et t_2 telles que $uv \in \mathbb{R}$, alors

$$(uv)^3 = u^3 v^3 = t_1 t_2 = -\frac{p^3}{27} \quad \Rightarrow \quad uv = -\frac{p}{3} \quad \text{car } uv \in \mathbb{R} \text{ et } t \mapsto t^3 \text{ est une bijection de } \mathbb{R}$$

De plus, d'après les relations coefficients-racines, $u^3 + v^3 = t_1 + t_2 = -q$; alors, l'équivalence établie au 2) est vérifiée et donc $u + v$ est solution de (E_1).
Ainsi, $\boxed{uv = \frac{-p}{3} \text{ et } u + v \text{ est solution de } (E_1).}$

c) Soit Δ le discriminant du trinôme à coefficients réels (E_1). Effectuons une disjonctions de cas :

- Soit $\Delta \geq 0$, les deux racines t_1 et t_2 sont réelles. Comme $t \mapsto t^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$, alors on peut poser $u_0 = t_1^{\frac{1}{3}}$ et $v_0 = t_2^{\frac{1}{3}}$ et on a $u_0 v_0 \in \mathbb{R}$.
- Soit $\Delta < 0$, les deux racines t_1 et t_2 sont complexes conjuguées de la forme $t_1 = re^{i\theta}$ et $t_2 = re^{-i\theta}$. Alors, on peut poser $u_0 = r^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}}$ et $v_0 = r^{\frac{1}{3}} e^{-i\frac{\theta}{3}}$ et on a $u_0 v_0 = r^{\frac{2}{3}} \in \mathbb{R}$

Ainsi, $\boxed{\text{il existe } u_0 \text{ et } v_0 \text{ racines cubiques respectives de } t_1 \text{ et } t_2 \text{ telles que } u_0 v_0 \in \mathbb{R}.}$

d) D'après 1), les racines cubiques de t_1 sont $\{u_0, ju_0, j^2u_0\}$ et celles de t_2 sont $\{v_0, jv_0, j^2v_0\}$. Il y a 9 couples possibles.

On trouve que $\boxed{\text{les trois couples dont le produit est réel sont : } (u_0, v_0),\ (ju_0, j^2v_0) \text{ et } (j^2u_0, jv_0).}$

e) D'après 3b), $\boxed{\text{les trois racines de } (E_1) \text{ sont } u_0 + v_0,\ ju_0 + j^2v_0 \text{ et } j^2u_0 + jv_0.}$

4. Procédons par disjonction de cas sur la valeur de $\Delta = q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$, discriminant de (E_2) :

- Soit $\Delta < 0$, alors on a vu que $v_0 = \overline{u_0}$ et donc d'après 1)

$$u_0 + v_0 = u_0 + \overline{u_0} = 2\mathrm{Re}\,(u_0) \quad ju_0 + j^2v_0 = ju_0 + \overline{ju_0} = 2\mathrm{Re}\,(ju_0) \text{ et } j^2u_0 + jv_0 = 2\mathrm{Re}\,(j^2u_0 + jv_0) \in \mathbb{R}$$

- Soit $\Delta = 0$, il y a une racines réelle (double), donc $v_0 = u_0$ et

$$u_0 + v_0 = 2u_0 \quad ju_0 + j^2v_0 = 2\mathrm{Re}\,(j)u_0 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)u_0 = -u_0 \text{ et } j^2u_0 + jv_0 = 2\mathrm{Re}\,(j^2)u_0 = -u_0 \in \mathbb{R}$$

- Soit $\Delta > 0$, les deux sont racines réelles et distinctes donc $v_0 \neq u_0$.

Il vient, $\mathrm{Im}\,(ju_0 + j^2v_0) = \mathrm{Im}\,(j)(u_0 - v_0) \neq 0$ donc $ju_0 + j^2v_0 \notin \mathbb{R}$.

Ainsi, $\boxed{\text{les racines de } (E_1) \text{ sont réelles si et seulement si } q^2 + \dfrac{4p^3}{27} \leq 0.}$

5. *Étude de* $(F_1) : z^3 - 12z - 65 = 0$ *:*

On pose $(F_2) : t^2 - 65t + 64 = 0$, car $\dfrac{12^3}{27} = 4^3 = 64$.

Son discriminant $\Delta = 65^2 - 4 \times 64 = 3969 = 63^2$ et ses racines sont :

$$t_1 = \frac{65 - 63}{2} = 1 \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{65 + 63}{2} = 64 = 4^3$$

On pose $u_0 = 1$ tels que $u_0^3 = t_1$ et $v_0 = 4$. Les racines de (F_1) sont

$$\boxed{1 + 4 = 5, \quad j + 4j^2 = -\frac{5}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad j^2 + 4j = -\frac{5}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Partie B - Forme générale

6. Posons $z = x - \alpha$ dans (E_0) :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{S}_{(E_0)} \quad &\Leftrightarrow \quad a(z+\alpha)^3 + b(z+\alpha)^2 + c(z+\alpha) + d = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad az^3 + \big(3a\alpha + b\big)z^2 + \big(3a\alpha^2 + 2b\alpha + c\big)z + a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0 \end{aligned}$$

Posons $\alpha = -\dfrac{b}{3a}$, alors $x \in \mathcal{S}_{(E_0)}$ et $z = x - \alpha$ si et seulement si

$$\boxed{z^3 + pz + q = 0 \text{ avec } p = \frac{1}{a}\big(3a\alpha^2 + 2b\alpha + c\big) \text{ et } q = \frac{1}{a}\big(a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d\big)}$$

7. Formule de Cardan pour résoudre $(E_0)\ :\ ax^3+bx^2+cx+d=0$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$:

MÉTHODE – Formule de Cardan

(i) Poser $\alpha=-\dfrac{b}{3a}$, $\quad p=\dfrac{1}{a}\big(3a\alpha^2+2b\alpha+c\big)$ et $q=\dfrac{1}{a}\big(a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d\big)$. Alors

$$x\in\mathcal{S}_{(E_0)} \text{ et } z=x-\alpha \quad\Leftrightarrow\quad z\in\mathcal{S}_{(E_1)}\ :\ z^3+pz+q=0$$

(ii) Soit t_1, t_2 les deux racines de $(E_2)\ :\ t^2+qt-\dfrac{p^3}{27}=0$.

(iii) Soit u,v deux racines cubiques (conjuguées) respectivement de t_1 et t_2

(iv) Alors $\mathcal{S}_{(E_1)}=\{u+v,ju+j^2v,j^2u+jv\}$ et $\mathcal{S}_{(E_0)}=\{u+v+\alpha,ju+j^2v+\alpha,j^2u+jv+\alpha\}$

8. Application à la résolution de $(E_4)\ :\ x^3-9x^2+21x-5=0$.

- $\alpha=3$, $p=-6$ et $q=4$.
- On considère $t^2+qt-\dfrac{p^3}{27}=0$ c'est à dire $t^2+4t+8=0$

  le discriminant est $\Delta=4^2-4\times1\times8=-16=(4i)^2<0$ (les solutions de (E_4) sont réelles)

  les racines sont $t_1=\dfrac{-4-4i}{2}=-2-2i$ et $t_2=-2+2i$
- Calcul de racines cubiques de t_1 et t_2. Ici, la forme trigonométrique est accessible :

$$t_1=2^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3i\pi}{4}}=\left(\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^3=(1-i)^3 \qquad\text{et}\qquad t_2=(1+i)^3$$

- Posons $u=1-i$ et $v=1+i$. Les solutions de (E_4) sont $u+v+\alpha=5$

$$ju+j^2v+\alpha=2\mathrm{Re}\,(ju)+3=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+3=2+\sqrt{3} \qquad\text{et}\qquad j^2u+jv+\alpha=2-\sqrt{3}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_{(E_4)}=\{5,2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}\}.}$