

DM 15

à rendre le mardi 27 février 2024

Formule de Cardan et Tartaglia

Objectif : Factoriser les polynômes de degré 3 à coefficients réels.

Partie A - Forme particulière

On cherche à déterminer les solutions complexes de l'équation suivante, où p et q sont des paramètres réels non nuls :

$$(E_1) : z^3 + pz + q = 0.$$

1. *Résultat préliminaire* : soit $z \in \mathbb{C}^*$, démontrer que si $w \in \mathbb{C}^*$ est une racine cubique de z alors les racines cubiques de z sont w , kw et $k^2w = \bar{k}w$ où $k = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ (ne pas se contenter de le vérifier).

2. Soit z_0 une solution de (E_1) .

Montrer qu'il existe des complexes u et v tels que :

$$\begin{cases} u + v = z_0 \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

Montrer que u^3 et v^3 sont racines de l'équation :

$$(E_2) : t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

3. Réciproquement, soient t_1 et t_2 les solutions complexes de l'équation (E_2) .

a) Montrer que t_1 et t_2 ne sont pas nulles.

b) Montrer que, si u et v sont des racines cubiques respectives de t_1 et t_2 telles que $uv \in \mathbb{R}$, alors $uv = \frac{-p}{3}$ et $u + v$ est solution de (E_1) .

c) Montrer qu'il existe u_0 et v_0 racines cubiques respectives de t_1 et t_2 telles que $u_0v_0 \in \mathbb{R}$.

Indication : On pourra discuter selon les valeurs du discriminant de (E_2) .

d) Déterminer en fonction de u_0 et v_0 tous les couples $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tels que u et v soient racines cubiques respectives de t_1 et t_2 et que $uv \in \mathbb{R}$.

e) En déduire, en fonction de u_0 , v_0 et j , les solutions de (E_1) .

4. À quelle condition portant sur p et q les solutions de (E_1) sont-elles toutes réelles ?

5. Application - Résoudre $(E_3) : z^3 - 12z - 65 = 0$.

Partie B - Forme générale

On cherche à déterminer les solutions complexes de l'équation suivante, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$:

$$(E_0) : ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

6. Montrer qu'en posant $x = z + \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ judicieusement choisi, la résolution de (E_0) se ramène à résoudre :

$$(E_1) : z^3 + pz + q = 0$$

On donnera l'expression de p, q en fonction de a, b, c et d .

7. Établir la formule de Cardan, c'est-dire donner un algorithme conduisant à résoudre (E_0) .

8. Application - Résoudre $(E_4) : x^3 - 9x^2 + 21x - 5 = 0$.