Corrigé du DM 16

1. Les applications exp et $x \mapsto -x^2$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}$). Par composition d'applications de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$
Calcul des dérivées :

$$f'(x) = -2x\exp(-x^2) \text{ et } f''(x) = -2\exp(-x^2) + (-2x)\times(-2x)\exp(-x^2) = (4x^2-2)\exp(-x^2)$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2x\exp(-x^2) \text{ et } f''(x) = (4x^2-2)\exp(-x^2)}$

2. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{P}(n) : \begin{cases} \exists P_n \in \mathbb{R}[X];\ \deg(P_n) = n,\ P_n = -2XP_{n-1} + P'_{n-1} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x) \end{cases}$$

- Initialisation : pour $n=0$, $f^{(0)}(x) = f(x) = 1f(x)$. Posons $P_0 = 1$ avec $\deg(P_0) = 0$.

Pour $n = 1$, $f'(x) = -2xf(x)$. Posons $P_1 = -2X$ avec $\deg(P_1) = 1$.
De plus $-2XP_0 + P'_0 = -2X = P_1$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiées.

- Hérédité : soit $n \geq 0$; supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée.

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' = (P_n(x)f(x))' \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= P'_n(x)f(x) - 2xP_n(x)f(x) \\ &= \underbrace{(-2xP_n(x) + P'_n(x))}_{P_{n+1}(x)}f(x) \end{aligned}$$

On pose $P_{n+1} = -2XP_n + P'_n$.
On a $\deg(P_n) = n$ donc $\deg(P'_n) = n-1$ et $\deg(-2XP_n) = \deg(-2X) + \deg(P_n) = n+1$.
Comme $n-1 < n+1$ alors $\deg(P_{n+1}) = max(n-1, n+1) = n+1$.
Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée.

3. D'après 1) et 2) : $\boxed{P_0 = 1,\ P_1 = -2X \text{ et } P_2 = 4X^2 - 2.}$ On vérifie que $-2XP_1 + P'_1 = P_2$.
Calculons P_3 : $-2XP_2 + P'_2 = -8X^3 + 4X + 8X = -8X^3 + 12X$. Ainsi $\boxed{P_3 = -8X^3 + 12X}$

4. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le terme dominant de P_n est $td(P_n) = (-2)^n X^n$.

- Initialisation : pour $n = 0$, $P_0 = 1$ donc $td(P_0) = 1$ et $(-2)^0X^0 = 1$.
- Hérédité : soit $n \geq 0$, supposons que $td(P_n) = (-2)^nX^n$.

On sait $P_{n+1} = -2XP_n + P'_n$ avec $\deg(P_n) = n$. Ainsi $\deg(-2XP_n) > \deg(P'_n)$, donc

$$td(P_{n+1}) = -2Xtd(P_n) = -2X(-2)^nX^n = (-2)^{n+1}X^{n+1}$$

- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ td(P_n) = (-2)^nX^n}$

5. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(-x) = (-1)^nP_n(x)$.

- Initialisation : pour $n = 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $P_0(-x) = 1 = P_0(x)$.
- Hérédité : soit $n \geq 0$; supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(-x) = (-1)^nP_n(x)$ ($\bigstar$).
  On sait que $P_{n+1} = -2XP_n + P'_n$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$P_{n+1}(-x) = -2(-x)P_n(-x) + P'_n(-x) = -2(-x)(-1)^nP_n(x) + P'_n(-x)$$

Pour déterminer l'expression de $P_n'(-x)$, dérivons ($\bigstar$) :

$$\begin{array}{lll} \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(-x) = (-1)^n P - n(x) & \Rightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \quad -P_n'(-x) = (-1)^n P_n'(x) \\ & \Rightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n'(-x) = (-1)^{n+1} P_n'(x) \end{array}$$

Ainsi, $P_{n+1}(-x) = (-1)^{n+1}\left(-2xP_n(x) + P_n'(x)\right) = (-1)^{n+1}P_{n+1}(x)$.

- Conclusion : la relation est vérifiée pour tout rang.

Par définition de la parité d'une fonction, on a que $\boxed{\text{si } n \text{ est pair alors } P_n \text{ est paire}}$ et $\boxed{\text{si } n \text{ est impair alors } P_n \text{ est impaire.}}$

6. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

- Initialisation : pour $n = 1$, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = (4x^2 - 2)\exp(-x^2) \text{ et } -2xf'(x) - 2f(x) = (4x^2 - 2)\exp(-x^2)$$

- Hérédité : soit $n \geq 1$, on suppose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = -2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} f^{(n+2)}(x) & = & \left(f^{(n+1)}(x)\right)' = \left(-2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x)\right)' \\ & & \text{par hyptohèse de récurrence} \\ & = & -2f^{(n)} - 2xf^{(n+1)} - 2nf^{(n)} \\ & = & -2xf^{(n+1)} - 2(n+1)f^{(n)} \end{array}$$

- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}\ f^{(n+1)}(x) = -2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x)}$

D'après 2), la définition des polynômes P_i donne pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$P_{n+1}(x)f(x) = -2xP_n(x)f(x) - 2nP_{n-1}(x)f(x)$$

Or f ne s'annule pas car $\exp > 0$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} + 2XP_n + 2nP_{n-1} = 0}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- D'une part, la relation (1) au rang $n+1$ donne $P_{n+1} + 2XP_n = P_n'$.

D'autre part, la relation (2) au rang n donne $P_{n+1} + 2XP_n = -2nP_{n-1}$.
Ainsi $P_n' = -2nP_{n-1}$.

- En dérivant la relation (1) considérée au rang $n+1$, on obtient

$$P_{n+1}' = -2P_n - 2XP_n' + P_n''$$

D'après la relation (3) au rang $n+1$, $P_{n+1}' = -2(n+1)P_n$.
Donc $-2P_n - 2XP_n' + P_n'' = -2(n+1)P_n$ c'est-à-dire $P_n'' - 2XP_n' + 2nP_n = 0$.
Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n' = -2nP_{n-1} \text{ et } P_n'' - 2XP_n' + 2nP_n = 0}$

8. Raisonnons par l'absurde : supposons que P_n et P_{n+1} ont une racine commune.
La relation (2) donne que cette racine annule aussi P_{n-1}. De proche en proche, cette racine est commune aussi à P_{n-2}, $P_{n-3}, \ldots, P_1$ et P_0. Or $P_0 = 1$ ne s'annule pas ce qui est contradictoire.
Ainsi, $\boxed{P_n \text{ et } P_{n+1} \text{ n'ont aucune racine en commun.}}$

Raisonnons par l'absurde : supposons que P_n admet une racine multiple, c'est-à-dire que P_n et P_n' ont une racine en commun.
La relation (3) donne que cette racine annule aussi P_{n-1} ; ainsi, P_n et P_{n-1} ont une racine en commun ce qui contredit ce qui vient d'être établi.
Ainsi, $\boxed{P_n \text{ n'a aucune racine multiple.}}$