# DM 16

à rendre le mardi 5 mars 2024

On définit la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \exp(-x^2)$.
1. Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'$ et $f''$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n$-ième de $f$ est de la forme:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x) f(x),$$

où $P_n$ est un polynôme de degré $n$ vérifiant, pour $n \geq 1$, la relation de récurrence:

$$(1) \quad P_n = -2XP_{n-1} + P'_{n-1}$$

3. Donner $P_0$ et $P_1$. Vérifier les résultats de la question 1) concernant $P_2$. Calculer $P_3$.

4. Déterminer le terme de plus haut degré de $P_n$.

5. Étudier la parité de ce polynôme, c'est-à-dire, déterminer si $P_n$ est une fonction paire ou impaire ou encore rien de cela.
On pourra commencer par établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

6. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n+1)}(x) = -2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x)$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(2) \quad P_{n+1} + 2XP_n + 2nP_{n-1} = 0$$

7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(3) \quad P'_n = -2nP_{n-1} \qquad \text{et} \qquad (4) \quad P''_n - 2XP'_n + 2nP_n = 0$$

8. Montrer que $P_n$ et $P_{n+1}$ n'ont aucune racine en commun.
En déduire que $P_n$ n'a aucune racine multiple.