Mouvement dans un champ de force centrale Newtonien

Introduction

<u>Qu'est ce qu'un champ de force</u> ? On parle de champ de force si la force considérée est **conservative** c'est-à-dire si elle dérive d'une énergie potentielle.

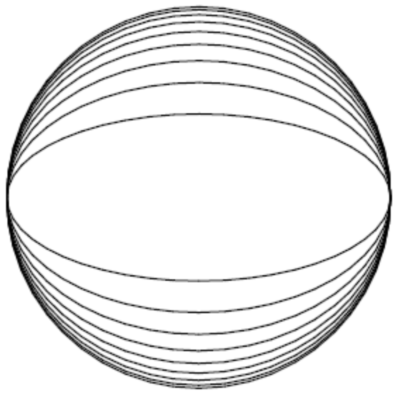
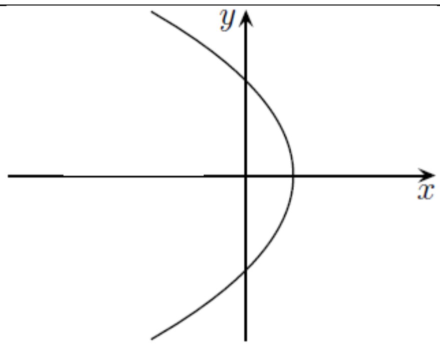
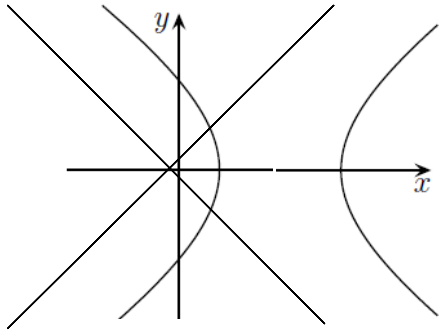
<u>Qu'est ce qu'un champ de force centrale</u> ? On parle de champ de force centrale si la force considérée est conservative et qu'elle est **toujours dirigée vers un point fixe**.

<u>Qu'est ce qu'un champ de force Newtonien</u> ? On parle de champ de force Newtonnien si la force considérée est conservative, centrale et **varie en 1/r^2**.

Les forces considérées dans ce chapitre seront du type : $\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{k}{r^2}\overrightarrow{u_r}}$

- Si k est positif alors la force est attractive : force d'**interaction gravitationnelle**
- Si k est négatif alors la force est répulsive : force d'**interaction Coulombienne**

Nous allons voir dans ce chapitre que la trajectoire d'un système (particule, planète satellite…) soumis à une interaction Newtonienne est **une conique** et que le type de conique dépend de la valeur de l'énergie mécanique communiquée initialement au système.

Trajectoire conique	courbes	état	$E_{\text{méca}}$	excentricité
elliptique (+ cas particulier du cercle)		lié	$E_{\text{méca}} < 0$	$0 \leq e < 1$ (e = 0 pour le cercle)
parabolique		de diffusion	$E_{\text{méca}} = 0$	$e = 1$
hyperbolique		de diffusion	$E_{\text{méca}} > 0$	$e > 1$

Mais, dans ce chapitre, nous ne nous ne démontrerons des résultats que dans le cas des **trajectoires circulaires** (que nous étendrons par analogie au cas des **trajectoires elliptiques**).

I Les forces centrales

1 Définition

2 Exemples

	Force d'interaction gravitationnelle	Force d'interaction Coulombienne	Force de rappel d'un ressort
Expression de $\vec{F}$	$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{u_r}$ avec $k = Gm_1m_2$	$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{u_r}$ avec $k = -q_1q_2/4\pi\varepsilon_0$	$\vec{F} = -kr\ \vec{u_r}$
Expression de E_p			$E_p = \frac{1}{2} kr^2 + \text{cste}$

3 Démonstration de l'expression de l'énergie potentielle pour une force Newtonienne

II Conséquences de la conservation du moment cinétique

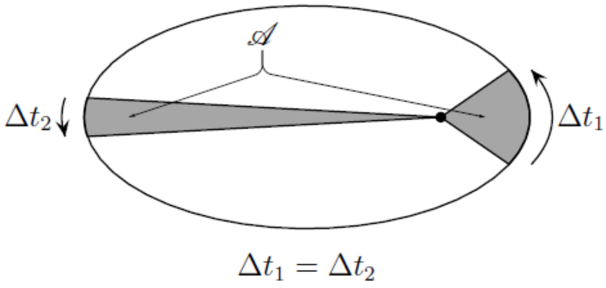
1 Le moment cinétique dans le cas d'une force centrale

2 La trajectoire est plane

3 La 2^e loi de Kepler ou loi des aires

<u>1ère loi de Kepler</u> : les planètes décrivent des ellipses dont l'un des foyers *F* est le centre du Soleil.

1ère loi de Kepler modifiée : dans le cas d'un satellite terrestre,



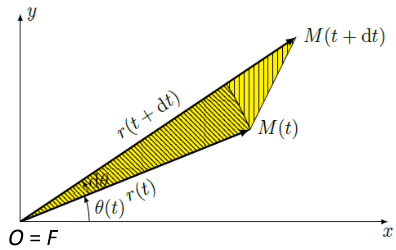
<u>Conséquences de la 2^e loi de Kepler</u> :

- si $r_1 > r_2$:

- si le mouvement est circulaire :

2^e loi de Kepler : le rayon vecteur $\overrightarrow{FM}$ (*F* étant le foyer de l'ellipse) balaie des surfaces (aires) égales pendant des durées égales.

<u>Démonstration</u> (voir animation):



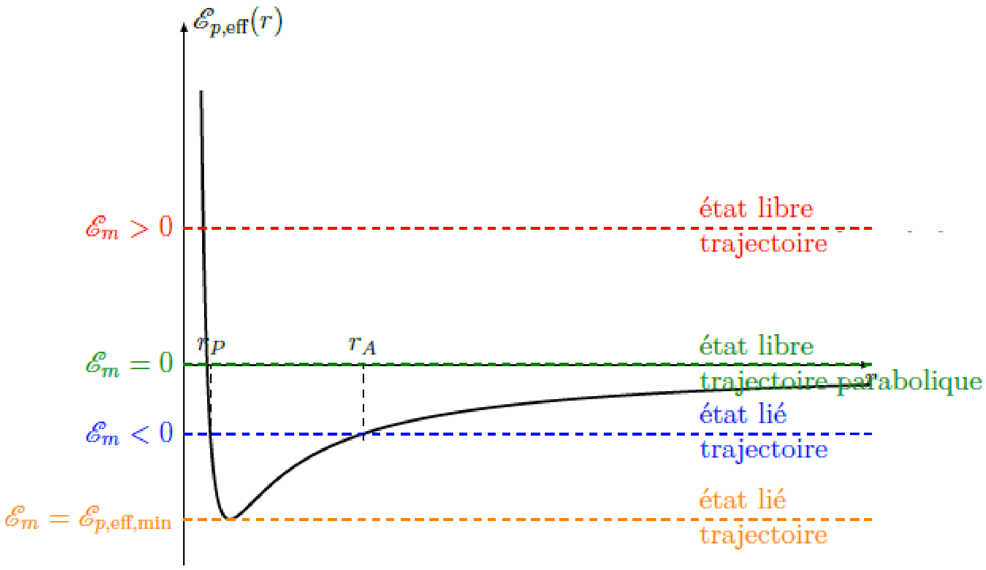
III Conséquences de la conservation de l'énergie mécanique

1 Energie mécanique et énergie potentielle effective

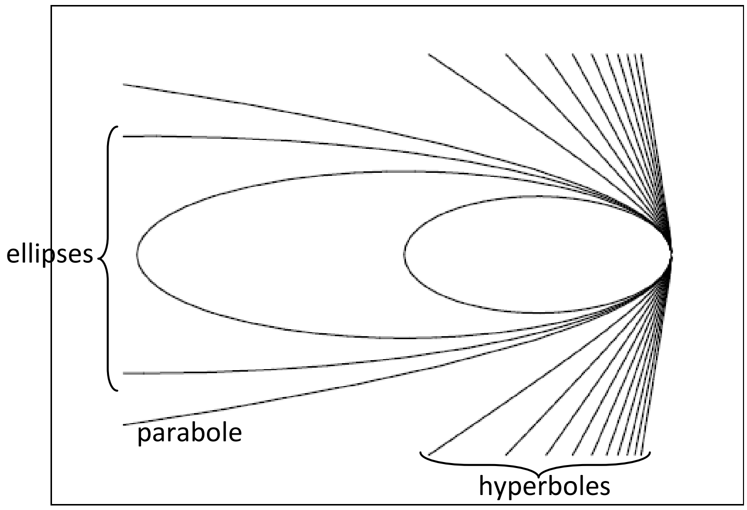
2 État lié et état de diffusion

Dans le cas de l'attraction gravitationnelle : $E_{p\ eff}\ (r)$ =

La courbe $E_{p\ eff}\ (r)$ présente un minimum (dérivée nulle), une asymptote verticale quand r tend vers 0 et une asymptote horizontale (axe des abscisses) quand r tend vers l'infini.



3 Classement des types de coniques

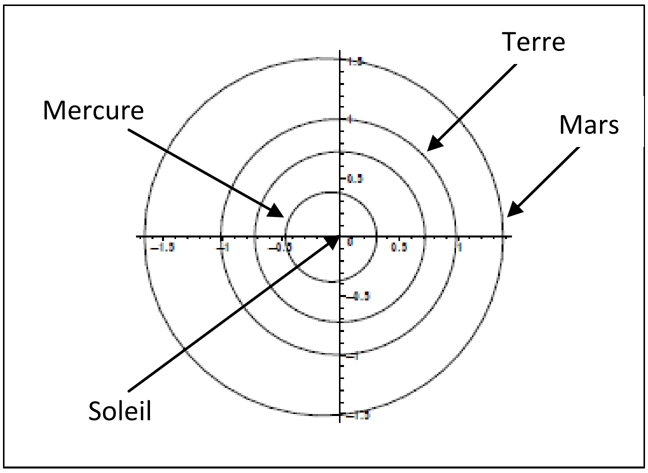


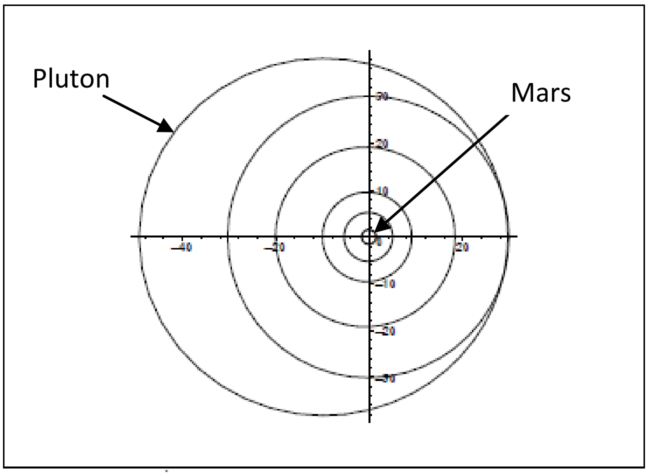
$E_{\text{méca}} < 0$:
$E_{\text{méca}} = 0$:
$E_{\text{méca}} > 0$:

4 Exentricité *e* des trajectoires des planète gravitant autour du Soleil

	Mercure	Venus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
rayon moyen *R* (en 10^6 km)	57,9	108	150	228	778	1430	2870	4500
excentricité	0,206	0,007	0,017	0,093	0,005	0,055	0,048	0,009
demi grand axe a en u.a.	0,387	0,723	1	1,524	5,202	9,555	19,22	30,11
période *T* de révolution en année	0,241	0,615	1	1,882	11,86	29,46	84,02	164,8

Trajectoires des planètes gravitant autour du Soleil (échelles différentes à gauche et à droite)

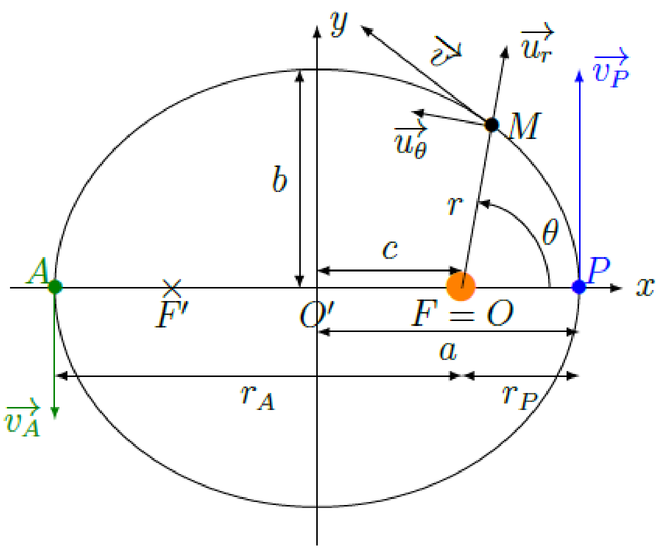




On observe que quasiment toutes les trajectoires des planètes gravitant autour du Soleil sont des **cercles centrés sur le Soleil** (valeur de l'excentricité *e* proche de 0), sauf Mercure (cercle décentré) et Pluton (trajectoire elliptique).

5 Propriétés des ellipses

Il est clairement dit dans le programme officiel que « toute étude géométrique des trajectoires elliptiques, hyperboliques et paraboliques est hors programme ». Voici cependant quelques relations qui pourraient être fournies en exercice et qui pourraient donc être exploitées :



On note *a* le ½ grand axe de l'ellipse : $AP = 2a$

On note *b* le ½ petit axe de l'ellipse

<u>Remarque</u> : dans le cas d'un cercle, le foyer *F* est au centre du cercle ($F = O$) et le demi grand-axe est égal au demi petit axe : $a = b = R$

IV Étude des trajectoires circulaires des planètes (ou des satellites)

On notera M_A la masse de l'astre central (égale à M_{Terre} ou M_{Soleil} selon le cas étudié)

1 Vitesse sur une trajectoire circulaire

Répondre à la question 2 de l'exercice 1

2 Période de révolution

Répondre à la question 3 de l'exercice 1

3 La troisième loi de Kepler

Répondre à la question 3 de l'exercice 1

4 Energie mécanique

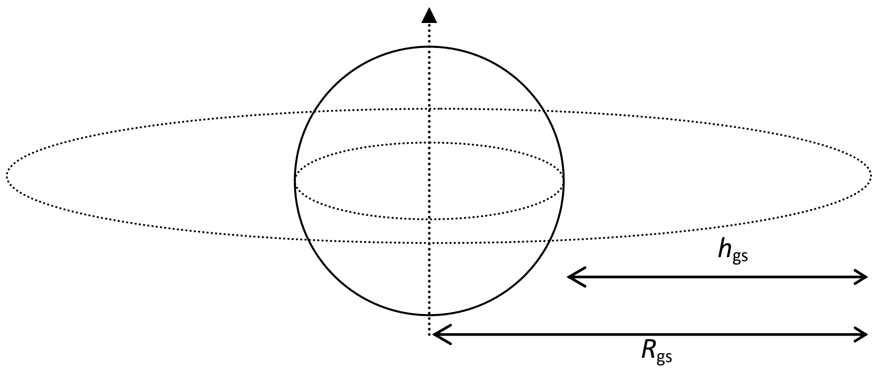
Répondre à la question 4 de l'exercice 1

5 Cas du satellite géostationnaire

Définition : un satellite géostationnaire est un satellite immobile à chaque instant par rapport à tout point de la Terre ; un satellite géostationnaire est donc immobile dans le référentiel terrestre.

Nécessairement, ce satellite doit donc être en orbite circulaire autour de l'axe des pôles, à la même vitesse de rotation que celle de la Terre. Par ailleurs, on sait que le mouvement de tout satellite est plan (conséquence de la conservation du moment cinétique) et plus précisément, dans un plan passant par le centre de la Terre.

En conséquence, un satellite géostationnaire est en orbite circulaire dans le plan de l'équateur, à la même vitesse de rotation que celle de la Terre.



V Généralisation de quelques relations au cas des trajectoires elliptiques

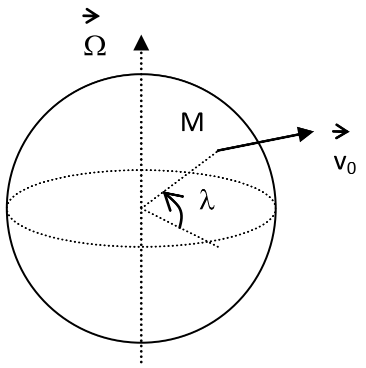
1 Energie mécanique

2 La troisième loi de Kepler

VI Satellisation et vitesses cosmiques

1 La satellisation

On considère la mise en orbite d'un satellite au départ de la surface de la terre, en un point de latitude λ. On appelle Ω la vitesse de rotation de la terre sur elle-même.



Lorsque le satellite est sur le pas de tir, et sans qu'on lui donne une impulsion supplémentaire, il a déjà, dans le référentiel géocentrique :

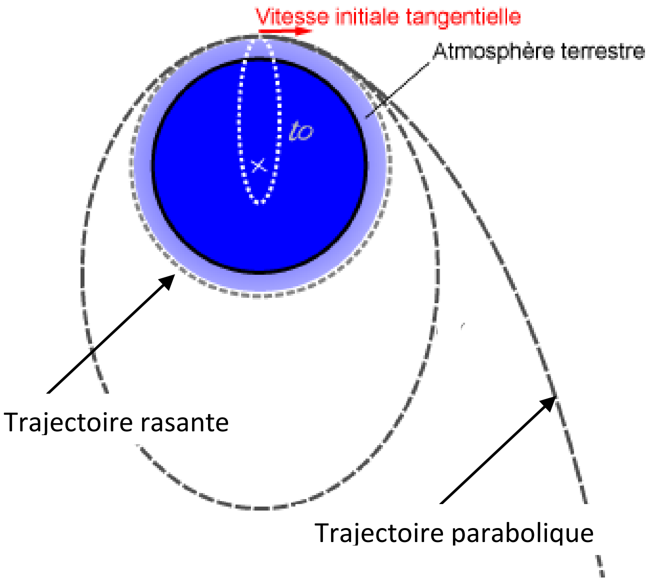
- une vitesse, celle due à la rotation de la Terre : $\overrightarrow{v_0} = r\,\Omega\overrightarrow{e_\varphi} = R_{Terre}\cos\lambda\,\Omega\overrightarrow{e_\varphi}$, où r est la distance à l'axe de rotation de la terre,
- une énergie cinétique : $E_{C0} = \frac{1}{2}m_{sat}v_0^2 = \frac{1}{2}m_{sat}R_{Terre}^2\Omega^2\cos^2\lambda$,
- une énergie potentielle : $E_{P0} = -\frac{Gm_{sat}m_{Terre}}{R_{Terre}}$,
- et donc finalement une énergie mécanique : $\boxed{E_{M0} = \frac{1}{2}m_{sat}R_{Terre}^2\Omega^2\cos^2\lambda - \frac{Gm_{sat}m_{Terre}}{R_{Terre}}}$.

On a intérêt, pour profiter au maximum de cette vitesse initiale, de le lancer près de l'équateur, pour maximiser cosλ (il y a un autre intérêt : les satellites géostationnaires sont dans le plan de l'équateur).

Sur l'orbite elliptique que l'on cherche à atteindre, l'énergie mécanique du satellite est : $\boxed{E_M = -\frac{Gm_{sat}m_{Terre}}{2a}}$. Pour passer de l'un à l'autre, il faut évidemment fournir de l'énergie au satellite.

Voir l'exercice 3 pour calculer la vitesse nécessaire pour passer d'une trajectoire à une autre.

2 Vitesse v_c en orbite circulaire basse



> La vitesse v_c en orbite basse est la vitesse d'un satellite sur une trajectoire circulaire rasante c'est-à-dire telle que son altitude h soit très inférieure au rayon R de la planète.

Remarque : si $v < v_c$

3 Vitesse de libération v_l

> La vitesse de libération v_l est la vitesse qu'il faut communiquer à un satellite initialement situé à une altitude basse ($h << R$) afin qu'il « échappe à l'attraction gravitationnelle » c'est-à-dire qu'il atteigne un état de diffusion.

VII Exercices

Données pour les applications numériques :

$R_T \approx 6400$ km ; champ de pesanteur à la surface de la Terre : $g_0 = 9{,}81$ m.s^{-2}

Prouver l'expression de $GM_T = g_0 R_T^2$ (relation utile pour plusieurs exercices…).

1 Exercice d'application 1 : satellite sur une trajectoire circulaire

Un satellite de masse m est a un mouvement circulaire uniforme autour de la Terre (de masse M_T) à une distance r du centre de la Terre. On note G la constante gravitationnelle universelle.

1- Rappeler l'expression de la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite dans la base polaire puis en déduire l'expression de l'énergie potentielle E_p associée à cette force (l'énergie potentielle de gravitation sera choisie nulle à l'infini).

2- Par application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, déterminer la vitesse v du satellite en fonction de la distance r au centre de la Terre.

3- En déduire l'expression de la période T de révolution du satellite autour de la Terre en fonction de r puis l'expression du rapport T^2/ r^3

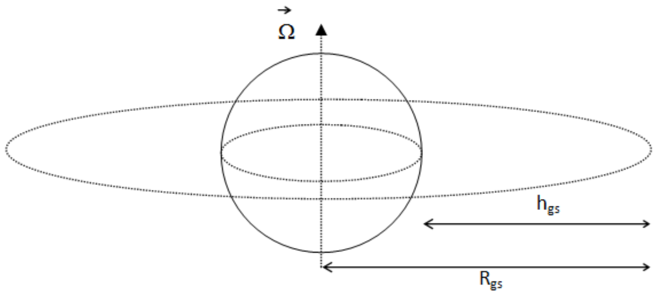
4- Déduire des deux questions précédentes, dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, une relation entre l'énergie potentielle E_p du satellite et son énergie cinétique E_c puis une relation entre son énergie mécanique E_m et son énergie potentielle E_p. Notons que ces relations sont aussi valables entre des variations d'énergie ΔE : $\Delta E_c = -\frac{1}{2} \Delta E_p$ et $\Delta E_m = \frac{1}{2} \Delta E_p$

2 Exercice d'application 2 : les satellites géostationnaires

- Définir un satellite géostationnaire et en déduire sa période de révolution T.
- Prouver que la trajectoire appartient au plan de l'équateur.

TP

- Ouvrir l'animation intitulée « satellite géostationnaire », cliquer sur « vue du satellite » puis sur « 6000 m/s » puis sur « commentaires ». Noter l'altitude h_{gs} et la vitesse d'un satellite v_{gs} géostationnaire.
- Rappeler la 3e loi de Kepler ainsi que les unités.
- Retrouver par le calcul la valeur de l'altitude h_{gs}. d'un satellite géostationnaire.



3 Vitesse maximale de libération et vitesse minimale de lancement

TP

Ouvrir l'animation « vitesse de lancement »
Choisir une altitude de lancement h = 2500 km (à l'aide des flèches du clavier).

1- Déterminer approximativement, à l'aide de l'animation, la vitesse de libération du satellite, c'est-à-dire la vitesse minimale à fournir à ce satellite dans le référentiel géocentrique afin qu'il échappe à l'attraction terrestre.

2- Après avoir relu le paragraphe VI 3 du cours, adapter le raisonnement afin de déterminer la vitesse théorique de libération v_{max} du satellite initialement à l'altitude h = 2500 km.

3- Comparer cette valeur à la vitesse minimale à fournir à un satellite initialement sur une trajectoire rasante ($r \approx R_T$) afin qu'il échappe à l'attraction terrestre (paragraphe VI 3). Commenter.

Dans la suite, on négligera les phénomènes de frottement dus à l'atmosphère de la Terre.

TP

4- Déterminer approximativement, à l'aide de l'animation, la vitesse de minimale de lancement du satellite, c'est-à-dire la vitesse minimale v_{min} à fournir à ce satellite (dans le référentiel géocentrique afin qu'il ne s'écrase pas sur la Terre).

5- Exprimer l'énergie mécanique du satellite en fonction de v_{min}, G, $m = m_{satellite}$, M_T, R_T et h.

6- Après avoir observé l'ellipse correspondant à la trajectoire qui rase la surface de la Terre en un point, proposer une autre expression de l'énergie mécanique en fonction uniquement de G, m, M_T, R_T et h.

7- En déduire l'expression puis la valeur de v_{min}. Comparer à la valeur obtenue avec l'animation.

4 Satellisation – ellipse de transfert

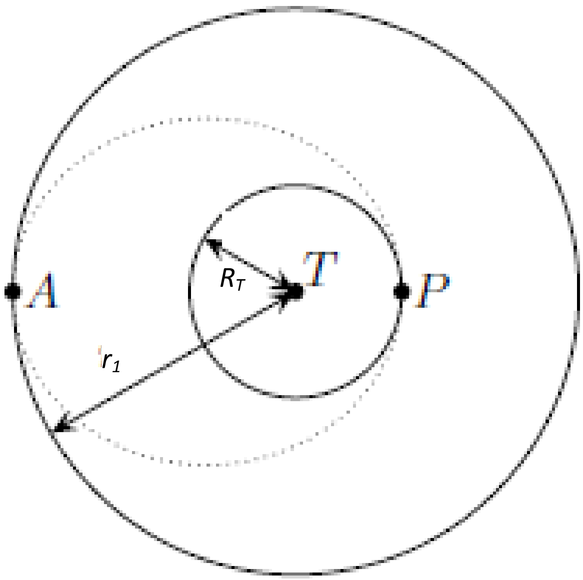
Ouvrir l'animation intitulée « ellipse de transfert » puis cliquer sur « auto » :

Questions à propos de l'animation :

TP
- Comment la vitesse du satellite a-t-elle dû être modifiée pour qu'il passe de son orbite circulaire basse à son orbite elliptique de transfert ? Justifier par une considération énergétique.
- Comment la vitesse du satellite a-t-elle dû être modifiée pour qu'il passe de son orbite de transfert à son orbite circulaire haute ?

TP
- Rappeler l'évolution de la valeur du moment cinétique sur chacune des trois trajectoires. Justifier.
- Comparer entre elles les valeurs (σ_1, σ_2 et σ_3) du moment cinétique sur chacune des trois trajectoires. Justifier cette relation d'ordre entre ces trois moments cinétiques.

Questions :



La Terre est supposée à symétrie sphérique, de centre T et de rayon R_T.

Remarque : le champ de gravitation d'un astre à symétrie sphérique est assimilable à celui d'une masse ponctuelle.

1- Un satellite de masse m décrit une trajectoire circulaire rasante (rayon ≈ R_T). Déterminer les expressions puis les valeurs de sa vitesse v_0 et de sa période T_0 (en heure et minute).

2- Un satellite géostationnaire décrit une trajectoire circulaire située dans le plan de l'équateur. Rappeler l'expression de son rayon r_1 puis en déduire les valeurs de r_1 et de sa vitesse v_1.

On veut maintenant faire passer ce satellite de l'orbite rasante à l'orbite géostationnaire. Un moteur auxiliaire permet de modifier la vitesse du satellite au point P puis au point A. Le satellite parcourt, entre P et A, une orbite elliptique dite de transfert.

3- Déterminer une relation entre r_1, R_T et les vitesses v_P et v_A (sur la trajectoire elliptique).

4- En utilisant deux expressions de l'énergie mécanique, exprimer la vitesse $v(r)$ du satellite sur son ellipse de transfert. En déduire les expressions puis les valeurs des vitesses v_P et v_A (sur la trajectoire elliptique).

4- Comparer v_0, v_P, v_A et v_1. Noter que cette relation d'ordre est cohérente avec les observations de l'animation ?

5- Exprimer puis calculer la durée du transfert de P à A.

5 Trou noir

En 1783, le physicien britannique John Michell eut l'idée pour la première fois de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. L'idée fût reprise par Laplace en 1796, puis abandonnée car elle semblait trop abstraite. Ce n'est qu'en 1916 qu'elle ressurgit, dans le cadre de la relativité générale, lorsque le jeune Karl Schwarzschild vit apparaître un tel objet dans les solutions des équations d'Einstein. Ce concept fut développé par la suite, et la dénomination de trou noir s'est imposée dans les années 1960. On pense aujourd'hui en avoir détecté un grand nombre.

On se propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille d'un trou noir dans le cadre de la physique classique.

Considérons pour cela un point matériel *M* de masse *m* à proximité d'un astre sphérique de centre *O*, de masse m_A et de rayon *R*. Ce point matériel est soumis uniquement à l'attraction gravitationnelle due à l'astre. On se place dans un référentiel astrocentrique (dans lequel le point *O* est fixe), qui est supposé galiléen.

1. Montrer que le mouvement de *M* est nécessairement plan. *M* étant alors repéré par ses coordonnées polaires, montrer que C = $r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

2. Exprimer la force gravitationnelle ressentie par *M* ainsi que l'énergie potentielle dont elle dérive en la supposant nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique de *M*. Celle-ci se conserve-t-elle ?

3. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ en introduisant l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$ dont on précisera l'expression en fonction de *r*.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de $E_{p,\text{eff}}(r)$. À l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de E_m le point *M* peut échapper à l'attraction de l'astre, c'est-à-dire se trouver dans un état de diffusion.

5. En déduire la vitesse de libération v_{lib} à la surface de cet astre.

6. Dans la conception classique de Michell, un trou noir est un astre dont la vitesse de libération est supérieure à $c = 3{,}00.10^8$ m·s^{-1}. Exprimer le rayon de Schwarzschild R_S de l'astre, c'est-à-dire le rayon maximal qu'il doit avoir pour être un trou noir.

7. Calculer numériquement R_S la Terre ($M_T = 6{,}0.10^{24}$ kg). En déduire la densité minimale d'un trou noir de cette masse. Que pensez-vous de la validité de l'étude menée ici ?

6 Freinage d'un satellite

Un satellite décrit une orbite circulaire à l'altitude *h* autour de la Terre.

1- Rappeler l'expression de la vitesse du satellite en fonction de l'altitude *h*.

2- Par suite de l'existence de frottement avec l'atmosphère, le satellite perd de l'altitude (variation d'altitude $|dh| \ll h$). On admet cependant que la trajectoire reste circulaire en première approximation. Trouver la relation liant la variation de vitesse d*v* à la variation d'altitude d*h* à chaque tour et la période *T* du satellite.

<u>Aide</u> : calculer la dérivée de *v* par rapport à *h*.

3- Commenter l'expression obtenue (notamment le signe).

4- Expliquer en quoi le commentaire précédent est cohérent avec les relations obtenues à la question 4 de l'exercice 1 (applicable car le satellite freiné passe, dans notre modèle, d'une trajectoire circulaire à une autre).