

CHARLEMAGNE I.S.23 lundi 11 avril	- COURS - $\int_0^{\pi/4} \tan^3(\theta).d\theta.$ [2 pt]	M.P.S.I.2. I.S.23 Année 2005/2006
---	--	---

Soient a, b et c les trois racines du polynôme $X^3 + \alpha.X^2 + \beta.X + \gamma$, avec γ non nul.

Calculez $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$. [1 pt]

Soit P un polynôme réel unitaire, de degré 4, et de racines a, b, c et d , supposées simples. Complétez les décompositions en éléments simples suivantes :

$$\frac{1}{P(X)} = \frac{1}{P'(a).(X-a)} + \dots, \quad \frac{P'(X)}{P^2(X)} = \dots \quad [3 \text{ pt}]$$

Montrez, pour tout polynôme P que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$ et $P(P(X)) - X$. [2 pt]

Donnez le développement limité de e^{x^3} quand x tend vers 1, à l'ordre 4. [2 pt]

	- LOGIQUE -	
--	-------------	--

Dans le département 42, dans la ville de Sorbiers, habite Monsieur Deux. Et son prénom est Jean-Paul. Si si. Vous pouvez vérifier dans l'annuaire. [-1 pt]

Une chaîne de supermarché propose un offre promotionnelle, annoncée à la radio : dix mille chariots offerts. Ils expliquent : quand vous passez en caisse, on vous donne un bon à gratter. Si ce bon est gagnant, on vous rembourse votre chariot, sous forme de bons d'achats. Jusque là, tout est normal. Mais j'aimerais qu'on m'explique pourquoi, comme pour tous les jeux promotionnels, il est précisé ensuite "jeu gratuit sans obligation d'achat". On fait quoi quand on a gagné mais qu'on n'avait rien acheté ? [0 pt]

	- CROCHETS DE LIE -	
--	---------------------	--

Le crochet de Lie de deux matrices A et B est la matrice $AB - BA$, notée $[A, B]$. On note L l'ensemble de tous les crochets de Lie quand A et B décrivent $M_2(\mathbb{R})$, et on veut étudier la structure de cet ensemble.

I- 1) Montrez que L est inclus dans l'ensemble des matrices carrées de taille 2 ayant une trace nulle (ensemble noté T). Donnez la dimension de T . [1,5 pt]

I- 2) Montrez que L est stable par multiplication par un réel. [1 pt]

I- 3) Montrez que toute matrice M semblable à un crochet de Lie $[A, B]$ est elle même un crochet de Lie. [1 pt]

II- 1) On note D l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$. Montrez que c'est un espace vectoriel, et donnez sa dimension. [1 pt]

II- 2) Montrez que toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec c non nul est semblable à une matrice de D (on pourra montrer que $(\vec{i}, f(\vec{i}))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et regarder la nouvelle matrice sur cette base). [2 pt]

II- 3) Montrez que toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice de D . [1,5 pt]

II- 4) Montrez que toute matrice de D est un crochet de Lie $[A, B]$ (vous pourrez prendre pour A la matrice de la projection sur $Vect(\vec{i})$ parallèlement à $Vect(\vec{j})$). [1,5 pt]

III- 1) Déduisez que L est égal à T . [2 pt]

IV- 1) Montrez que la somme de deux crochets de Lie est encore un crochet de lie, mais montrez que le produit ne l'est plus forcément. [1,5 pt]

	- I.S.23 -	
--	------------	--

CHARLEMAGNE
CORRIGÉ

© N.C.

Soit P un polynôme réel unitaire (son coefficient dominant vaut donc 1), de degré 4, et de racines a, b, c et d , supposées simples. Complétez les décompositions en éléments simples suivantes :

M.P.S.I.2.
I.S.23

Année 2004/2005

On a une décomposition qui ne contient que des termes en $1/(X-a)$, $1/(X-b)$, $1/(X-c)$ et $1/(X-d)$. L'énoncé semble suggérer que les coefficients soient simplement des $1/P'(a)$ et autres.

Une satisfaction : on a des racines simples, $P'(a)$ est non nul.

On pose *a priori* $\frac{1}{(X-a).(X-b).(X-c).(X-d)} = \frac{\alpha}{X-a} + \frac{\beta}{X-b} + \frac{\gamma}{X-c} + \frac{\delta}{X-d}$, et on calcule α par la méthode des pôles. Par symétrie des rôles, on aura aussi β, γ et δ .

On multiplie par $(X-a)$ et on fait tendre X vers a , il vient : $\frac{1}{(a-b).(a-c).(a-d)} = \alpha$.

Mais on avait : $P(X) = (X-a).(X-b).(X-c).(X-d)$.

On dérive : $P'(X) = (X-b).(X-c).(X-d) + (X-a).(X-c).(X-d) + (X-a).(X-b).(X-d) + (X-a).(X-b).(X-c)$.

Il vient bien $P'(a) = (a-b).(a-c).(a-d)$. La décomposition est bien avec des $1/P'(a)$ et autres :

$$\frac{1}{P(X)} = \frac{1}{P'(a).(X-a)} + \frac{1}{P'(b).(X-b)} + \frac{1}{P'(c).(X-c)} + \frac{1}{P'(d).(X-d)}$$

On peut aussi écrire que α est la limite de $\frac{(X-a)}{P(X)}$ quand X tend vers a , c'est à dire de $\frac{\frac{1}{P(X)} - \frac{1}{P(a)}}{\frac{1}{X-a}}$.

On dérive ensuite : $\frac{P'(X)}{(P(X))^2} = \frac{1}{P'(a).(X-a)^2} + \frac{1}{P'(b).(X-b)^2} + \frac{1}{P'(c).(X-c)^2} + \frac{1}{P'(d).(X-d)^2}$

Montrez, pour tout polynôme P que $P(X) - X$ divise
 $P(P(X)) - P(X)$ et $P(P(X)) - X$.

On pose *a priori* : $P(x) = \sum_{k=0}^{k=d} a_k.X^k$, et on calcule :

$$P(P(X)) - P(X) = \sum_{k=0}^{k=d} a_k.(P(X))^k - \sum_{k=0}^{k=d} a_k.X^k$$

On fusionne et on élimine le terme constant : $P(P(X)) - P(X) = \sum_{k=1}^{k=d} a_k.((P(X))^k - X^k)$

On sort la belle formule $\alpha^k - \beta^k = (a-b). \sum_{i=0}^{i=k-1} \alpha^i.\beta^{k-1-i}$, qui s'écrit plus lisiblement

$\alpha^k - \beta^k = (\alpha - \beta).(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}.\beta + \dots + \beta^{k-1})$ (dans laquelle il n'y a pas de coefficients binomiaux).

Chaque terme $(P(X))^k - X^k$ est factorisable par $P(X) - X$.

Par stabilité de l'idéal des multiples de $P(X) - X$, la somme $P(P(X)) - P(X)$ est un multiple de $P(X) - X$.

Enfin, $(P(P(X)) - P(X)) + (P(X) - X)$ est aussi un multiple de $P(X) - X$.

Calculer $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \tan^3(\theta).d\theta$.

Déjà, l'application intégrée est continue, il n'y a pas de problème d'existence.

On écrit juste : $\tan^3(\theta) = \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^3(\theta)}. \sin(\theta) = \frac{1 - \cos^2(\theta)}{\cos^3(\theta)}. \sin(\theta)$.

On peut donc poser le changement de variable C^1 -difféomorphe $c = \cos(\theta)$, et l'intégrale devient

$$\int_{c=1}^{c=\sqrt{2}/2} \frac{1-c^2}{c^3}.(-dc)$$

On arrange en $\int_{c=\sqrt{2}/2}^{c=1} \left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{c}\right).dc$. On intègre en $-\frac{1}{2.c^2} - \ln(c)$. On trouve au final

$\frac{1 - \ln(2)}{2}$

.....
Calculez $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$.

Comme γ est non nul, aucune de ces racines n'est nulle, et cette somme se calcule.

Un fois qu'on a compris qu'il fallait mettre en commun les $1/a$ et autres, pour avoir des $\frac{b+c}{a}$

qu'on remplace par $\frac{-\alpha - a}{a}$, on se dit que la meilleure chose à faire est d'ajouter les termes qui manquent : $\frac{a}{a} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{c} = (a+b+c).(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$

On utilise ensuite les relations coefficients racines. Cette somme vaut $(-\alpha).\frac{\beta}{-\gamma}$.

On a donc :

$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \frac{\alpha.\beta}{\gamma} - 3$

.....
Donnez le développement limité de e^{x^3} quand x tend vers 1, à l'ordre 4.

On pose évidemment $x = 1+h$ et h va tendre vers 0. Comme ce n'est pas x qui tend vers 0, on n'utilise pas directement le développement limité en 0 de l'exponentielle.

Toutefois, on a $e^{x^3} = e^{1+3.h+3.h^2+h^3} = e.e^{3.h}.e^{3.h^2}.e^{h^3}$. On développe chaque terme :

$e^{(1+h)^3} = e.(1+3.h+\frac{9.h^2}{2} + \frac{27.h^3}{6} + \frac{81.h^4}{24} + o(h^4)).(1+3.h^2+\frac{9.h^4}{2} + o(h^4)).(1+h^3+o(h^4))_{h \rightarrow 0}$

On développe les deux derniers :

$e^{(1+h)^3} = e.(1+3.h+\frac{9.h^2}{2} + \frac{27.h^3}{6} + \frac{81.h^4}{24} + o(h^4)).(1+3.h^2+h^3+\frac{9.h^4}{2} + o(h^4))_{h \rightarrow 0}$

On recommence :

1	1	3.h	9.h ² /2	27.h ³ /6	81.h ⁴ /24
3.h ²	1	3.h	9.h ² /2	27.h ³ /6	81.h ⁴ /24
h ³	3.h ²	9.h ³	27.h ⁴ /2	o(h ⁴)	o(h ⁴)
h ⁴ /2	h ³	3.h ⁴	o(h ⁴)	o(h ⁴)	o(h ⁴)
	9.h ⁴ /2	o(h ⁴)	o(h ⁴)	o(h ⁴)	o(h ⁴)

On réunit les termes de même degré :

$e^{(1+h)^3} = e + 3.e.h + \frac{15.e.h^2}{2} + \frac{29.e.h^3}{2} + \frac{195.e.h^4}{8} + o(h^4)_{h \rightarrow 0}$

Si on y tient, on revient à $h = x - 1$, mais c'est inutile et risqué.

Le retour à $x - 1$ est souvent pour les élèves médiocres de prouver qu'ils sont en fait carrément nuls. En effet, il traîne en fin de leurs formules un $o(x^4)_{x \rightarrow 1}$ au lieu du $o((x - 1)^4)_{x \rightarrow 1}$. Rappelons que $o(x^4)_{x \rightarrow 1}$ est juste un terme qui tend vers 0, car écrasé par 1^4 , tandis que $o((x - 1)^4)_{x \rightarrow 1}$ est un terme qui doit vite tendre vers 0, comme un infiniment petit d'ordre 4 (du 10^{-4} pour celui qui croit voir les maths comme un physicien). Ensuite, il y a les crétins qui développent tout en puissances de x . Rappelons que entre 1, x , x^2 et x^3 , quand x tend vers 1, il n'y a pas de comparaison judicieuse, puisque tous tendent vers 1. En revanche, 1, $x - 1$, $(x - 1)^2$, $(x - 1)^3$ s'ordonnent bien.

.....
Montrez que L est inclus dans l'ensemble des matrices carrées de taille 2 ayant une trace nulle.

• L'ensemble des matrices de trace nulle est le noyau de l'application $M \mapsto Tr(M)$. Comme cette application est linéaire, son noyau est un espace vectoriel. Comme elle va d'un espace de dimension 4 vers un espace de dimension 1 et que son ensemble image n'est pas réduite à $\{0\}$, son noyau est de dimension $4 - 1$, c'est à dire 3. On peut aussi donner une base.

• On prend un crochet de Lie s'écrivant $[A,B]$. Par linéarité de la trace, sa trace vaut $Tr(A.B) - Tr(B.A)$. le résultat classique et bien pratique sur les traces dit qu'il y a égalité,

et on trouve bien $Tr([A, B]) = 0$.

- Si on prend un crochet de Lie M s'écrivant $[A, B]$ et un réel λ , alors $\lambda.M$ s'écrit $A.(\lambda.B) - (\lambda.B).A$ par propriété des algèbres matricielles, et vaut donc $[A, \lambda.B]$. C'est bien un crochet de Lie.
- On prend une matrice M et on la suppose semblable à un certain crochet de Lie $[A, B]$ via une matrice de passage P . On traduit : $M = P.(A.B - B.A).P^{-1}$. On arrange en $M = P.A.B.P^{-1} - P.B.A.P^{-1}$ et même en $M = P.A.P^{-1}.P.B.P^{-1} - P.B.P^{-1}.P.A.P^{-1}$. On reconnaît le crochet de Lie $[P.A.P^{-1}, P.B.P^{-1}]$. M est dans L .

On note D l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$.
Montrez que c'est un espace vectoriel, et donnez sa dimension.

C'est en fait $Vect\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. C'est donc tout de suite un espace vectoriel, en tant qu'espace engendré par deux éléments. Comme ces éléments sont indépendants, ils en forment une base, et la dimension vaut 2.

On note qu'il s'agit même d'un sous-espace vectoriel de T .

On note aussi que de nombreux élèves confondent "trace nulle" avec "diagonale nulle". Je ne peux rien pour ceux là. Ils seront même dangereux si on leur donne un jour des responsabilités, si ils se contentent ainsi de lire en diagonale les définitions, mode d'emploi et consignes de sécurité.

- On prend la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec c non nul. On l'interprète comme matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ noté f . On sait : $f(\vec{i}) = a.\vec{i} + c.\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = b.\vec{i} - a.\vec{j}$.

On regarde la famille $(\vec{i}, f(\vec{i}))$. C'est une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Comme c est non nul, ces deux vecteurs sont non colinéaires. Ils forment donc une famille libre. Comme ils ont le bon cardinal, ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

On regarde alors la matrice de f sur cette base. On a la première colonne : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, par définition même de $f(\vec{i}) = f(\vec{i})$. Pour ce qui est de la seconde colonne, on ne sait pas trop. On pose *a priori* une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$.

Quoi qu'il en soit, la matrice obtenue doit être semblable à la matrice initiale. Elle doit donc avoir la même trace, c'est à dire 0. On a donc : $\beta = 0$, et la matrice obtenue est de la forme imposée (changez le nom des variables s'il le faut).

- On prend maintenant $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$. C'est la matrice d'un morphisme g défini par $g(\vec{i}) = a.\vec{i}$ et $g(\vec{j}) = -a.\vec{j}$. On sent une forme de symétrie, au facteur multiplicatif près a .

On se demande alors si la base $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j})$ ne serait pas bonne.

On a : $g(\vec{i} + \vec{j}) = g(\vec{i}) + g(\vec{j}) = a.\vec{i} - a.\vec{j} = a.(\vec{i} - \vec{j})$ et $g(\vec{i} - \vec{j}) = g(\vec{i}) - g(\vec{j}) = a.\vec{i} + a.\vec{j} = a.(\vec{i} + \vec{j})$.

La matrice cherchée sur cette base devient : $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

Au fait, c'est bien une base, son déterminant relatif à la base initiale vaut 2.

Comme c'est la matrice du même morphisme g sur une autre base, c'est une matrice équivalente à la matrice initiale.

D'autres choix de base sont bien sûr possibles.

Montrez que toute matrice de D est un crochet de Lie
 $[A, B]$.

On part de $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ et on cherche à l'écrire $A.B - B.A$. On nous propose de prendre A égale à

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On tâtonne et on trouve par exemple $B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$.

Il suffit de vérifier : $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$

La matrice donnée est bien un crochet de Lie.

Déduisez que L est égal à T .

On a déjà une inclusion : $L \subset T$.

On passe à la réciproque. On prend une matrice M de T . Sa trace est nulle. Elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Objectif : on veut montrer que c'est un crochet de Lie.

Si c est non nul, elle est semblable à un élément de D .

Si d est non nul, elle est semblable à un élément de D , par le même type de raisonnement, avec la base $(\vec{j}, f(\vec{j}))$.

Si c et d sont nuls, elle est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ et elle est encore semblable à un élément de D .

Dans tous les cas, la matrice donnée dans T est semblable à un élément de D .

Cet élément de D peut s'écrire comme un crochet de Lie.

Toute matrice semblable à un crochet de Lie est à son tour un crochet de Lie. C'est fini.

On a donc égalité : les crochets de Lie sont les matrices de trace nulle.

La somme de deux crochets de Lie $A.B - B.A$ et $C.D - D.C$ est la somme de deux matrices de trace nulle. C'est donc une matrice de trace nulle. Elle est donc aussi un crochet de Lie.

La décomposition en $E.F - F.E$ n'est pas livrée par notre raisonnement. Et elle n'est pas simple à obtenir par bidouillage à partir de A, B, C et D .

On prend ensuite deux matrices de trace nulle : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On sait que ce sont deux crochets de Lie. Leur produit est I_2 qui n'a pas de trace nulle et n'est pas un crochet de Lie.