LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 16 décembre
M.P.S.I.2

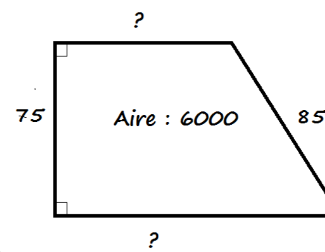
2022 2023

DS04

$\bigstar_1$ Montrez que pour tout n, $\binom{2.n}{n}$ est un entier pair. 2 pt.

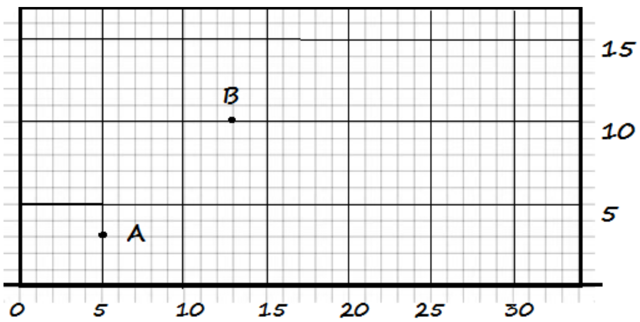
$\bigstar_2$ On m'a dit : $x - \sqrt{\dfrac{10}{x}} = 11$. J'ai calculé x, puis j'ai calculé $x - \sqrt{10.x}$ et là, j'ai trouvé un entier.
Lequel ? 3 pt.

Indication : $x - 10 = \dfrac{\sqrt{10} + ☻}{☺}$.



On connaît deux longueurs et l'aire de ce trapèze droit. Retrouvez les deux longueurs qui manquent.

$\bigstar_0$ 3 *pt*



$\bigstar_3$ On donne $A(5,3)$, $B(13,10)$.
Combien y a-t-il de points C du quadrillage de la fenêtre $[0,\ 34] \times [0,\ 17]$ pour lesquels l'aire du triangle (A, B, C) vaut 10 ? 4 pt.

$\bigstar_4$ Calculez
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin(x + \sin(x)) - \sin(x - \sin(x)).dx$. 3 pt.

$\bigstar_5$ Calculez à 10^{-5} près
$\sqrt[4]{\sqrt{2}.\sqrt{4}.\sqrt{8}.\sqrt{16}\ldots\sqrt{32768}}$. 2 pt.

Entiers

Pour tout entier naturel n, on note D_n l'ensemble des familles de triplets d'entiers de $\mathbb{N}^*$ tous distincts de somme n (chaque nombre de $\mathbb{N}^*$ peut intervenir au plus une fois dans une somme).
Un élément de D_n est une famille de triplets $\{(a_k,\ b_k,\ c_k) \mid k \leqslant p\}$ vérifiant

$$\Big(\forall k,\ a_k + b_k + c_k = n\Big)\ et\ \Big(\forall (k,\ i),\ i \neq k \Rightarrow Card\{a_i, b_i, c_i, a_k, b_k, c_k\} = 6\Big)$$

Le mieux est de donner un exemple : dans D_{18} *il y a* $\{(1,6,11),\ (2,4,12),\ (3,5,10)\}$ *mais aussi* $\{(1,6,11),\ (2,12,4)\}$ *et pourquoi pas* $\{(4,5,9)\}$.

♣ 0 ♣ Montrez que D_6 a exactement six éléments. 2 pt.

♣ 1 ♣ On note $s(n)$ le cardinal de la plus grand famille de D_n. Justifiez : $s(7) = 1$. 2 pt.

♣ 2 ♣ Justifiez $s(11) = 2$ et $Card(D_{11}) \geqslant 36$. 2 pt.

♣ 3 ♣ Montrez pour tout n : $s(n) \leqslant \dfrac{n}{3}$. 1 pt.

♣ 4 ♣ n donné, on pose $s(n) = p$. Montrez que toute somme de $3.p$ entiers de $\mathbb{N}^*$ distincts vaut au moins $\dfrac{3.p.(3. = 1)}{2}$. Déduisez : $s(n) \leqslant \left[\dfrac{2.n - 3}{9}\right]$. 3 pt.

♣ 5 ♣ Soit $2.p + 1$ un entier impair. Démontrez qu'on peut répartir les entiers de 1 à $6.p + 3$ (inclus) en $2.p + 1$ groupes de trois nombres, tels que la somme dans chaque groupe soit la même et que les nombres $4.p + 3$, $4.p + 4$ jusqu'à $6.p + 3$ soient tous dans des groupes différents. 4 pt.

Exemple : $2.p + 1 = 5$

11	12	13	14	15
10	8	6	9	7
3	4	5	1	2

et $2.p + 1 = 7$:

15	16	17	18	19	20	21
14	12	10	8	13	11	9
4	5	6	7	1	2	3

♣ 6 ♣ Calculez $s(24)$, et montrez $s(25) = s(26) = s(27) = s(28) = 5$. 2 pt.

♣ 7 ♣ Montrez que si $\left[\dfrac{2.n - 3}{9}\right]$ est impair, alors on a $s(n) \geqslant \left[\dfrac{2.n - 3}{9}\right]$. 2 pt.

Zeta de Riemann et Bernoulli $\rightarrow$

I~0) n est un entier naturel supérieur ou égal à 1. Pour tout p, on définit $S_{n,p} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^{2.n}}$. Montrez que $(p \longmapsto S_{n,p})$ est croissante, majorée (on pourra montrer : $\frac{2.n-1}{(k+1)^{2.n}} \leqslant \frac{1}{k^{2.n-1}} - \frac{1}{(k+1)^{2.n-1}}$ et même l'utiliser pour k de 1 à $p-1$).$\boxed{\text{3 pt.}}$

I~1) On note Z_n la limite de $S_{n,k}$ quand k tend vers l'infini ($Z_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2.n}}$ et Z_1 est la célèbre somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$). Montrez que $n \longmapsto Z_n$ est décroissante.$\boxed{\text{1 pt.}}$

I~2) Calculez $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ à l'aide de Z_1.$\boxed{\text{2 pt.}}$

Je vous offre les premiers

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}$	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}$

C'est juste pour vous faire comprendre qu'on va montrer que Z_n va s'exprimer à l'aide de puissances de π et de nombres appelés « nombres de Bernoulli ». Et ces nombres font l'objet de la suite justement.

II~0) Les polynômes de Bernoulli sont définis par $B_0 = 1$ et pour tout n, $(B_n)' = n.B_{n-1}$ et $\int_0^1 B_n(t).dt = 0$. On pose $b_n = B_n(0)$. Montrez : $B_1 = X - \frac{1}{2}$, déterminez B_2 et tracez B_0, B_1 et B_2 sur un même graphe.$\boxed{\text{2 pt.}}$ Calculez b_k pour k de 0 à 3.$\boxed{\text{2 pt.}}$

II~1) Montrez que pour tout n, B_n est de degré n.$\boxed{\text{1 pt.}}$ Montrez pour tout n de $\mathbb{N} - \{0,1\}$: $B_n(1) = b_n$.$\boxed{\text{1 pt.}}$

II~2) Exprimez $(B_n)^{(k)}$ à l'aide de B_{n-k}. Déduisez : $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.b_{n-k}.X^k$.$\boxed{\text{3 pt.}}$

II~3) Déduisez : $b_{n-1} = -\frac{1}{n}.\sum_{p=0}^{n-2} \binom{n}{p}.b_p$.$\boxed{\text{2 pt.}}$

II~4) Écrivez un script Python qui prend en entrée n et retourne la liste $[b_0,\ b_1,\ b_2, \dots b_n]$ (suivant votre niveau, considérez que vous avez le droit d'importer une fonction binomial, ou devez la recréer, ou pouvez vous en passer).$\boxed{\text{3 pt.}}$

III~0) Pour tout n, on définit $g_n = x \longmapsto B_{2.n}\left(\frac{x}{2.\pi}\right)$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$ on définit $a_k(n) = \frac{1}{\pi}.\int_0^{2.\pi} g_n(t).\cos(k.t).dt$. Calculez $a_k(0)$ puis $a_k(1)$ pour tout k (gare aux k particuliers).$\boxed{\text{3 pt.}}$

III~1) Montrez : $a_k(n) = \frac{n}{(k.\pi)^2}.\left(B_{2.n-1}(1) - B_{2.n-1}(0)\right) - \frac{2.n.(2.n-1)}{(2.k.\pi)^2}.a_k(n-1)$ *(NON, pas de récurrence, ni sur n, ni sur k)*.$\boxed{\text{2 pt.}}$

III~2) Déduisez : $a_k(n) = \frac{(-1)^{n-1}.(2.n)!}{2^{2.n-1}.(k.\pi)^{2.n}}$.$\boxed{\text{2 pt.}}$

IV~0) Montrez pour tout t réel et tout p entier : $2.\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{p} \cos(k.t)\right).\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sin\left(\frac{2.p+1}{2}.t\right)$.$\boxed{\text{3 pt.}}$

IV~1) Déduisez : $g_n(0) - \sum_{k=1}^{p} a_k(n) = \int_0^{2.\pi} \frac{g_n(0) - g_n(t)}{2.\sin(t/2)}.\sin\left(\frac{2.p+1}{2}.t\right).dt$.$\boxed{\text{3 pt.}}$

IV~2) Montrez que si h est une application C^1 alors $\int_0^{2.\pi} h(t).\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.t\right).dt$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (on pourra intégrer par parties).$\boxed{\text{2 pt.}}$

IV~3) Déduisez que $g_n(0) - \sum_{k=1}^{p} a_k(n)$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini.$\boxed{\text{2 pt.}}$

IV~4) Déduisez : $b_{2.n} = (-1)^{n-1}.\frac{(2.n)!}{2^{2.n-1}.\pi^{2.n}}.Z_n$. Retrouvez vous les résultats encadrés à la fin de la première partie ?$\boxed{\text{2 pt.}}$

LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 16 décembre
M.P.S.I.2

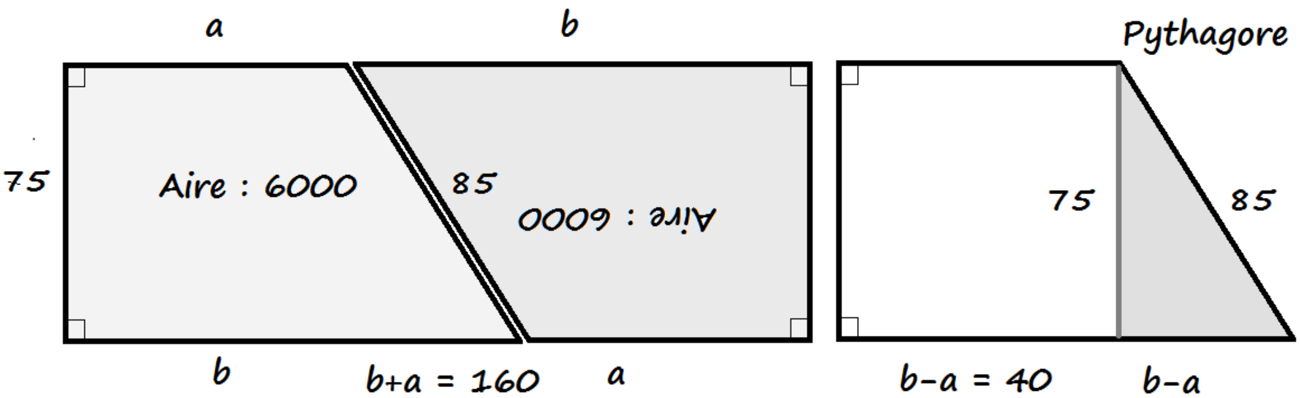
2022 2023
DS04
CORRECTION

Binomial. DS04

On regarde les premiers coefficients « de milieu de ligne ».
On confirme qu'on a des entiers (par construction des binomiaux).
Et les premiers $\binom{2}{1}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{2}{1}$ et $\binom{2}{1}$ sont pairs.
Si on regarde juste la construction de Pascal ! :
$\binom{2.n}{n} = \binom{2.n-1}{n} + \binom{2.n-1}{n-1}$.
Mais par symétrie sur une ligne (rappel : $\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}$)
on a $\binom{2.n-1}{n} = \binom{2.n-1}{n-1}$.
Un $\binom{2.n-1}{n}$ est le double d'un binomial de la ligne précédente : $\boxed{\binom{2.n}{n} = 2.\binom{2.n-1}{n}}$
C'est un entier pair (sauf pour la ligne 0 où il n'y a pas de ligne au dessus.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Un trapèze. DS04



On commence par calculer l'aire du trapèze, par la formule « hauteur fois moyenne des bases », qui se comprend par la vision du double de l'aire.
En notant a et b les deux côtés parallèles, on a donc $2 \times 6000 = 75 \times (a+b)$.
On a donc $a+b = \frac{2\times 60\times 100}{3\times 25} = 2\times 20\times 4 = 160$.

Mais on regarde aussi le triangle rectangle qu'on peut construire avec la pointe du trapèze (côtés 75, 85 et $b-a$) et on lui applique le théorème de Pythagore : $85^2 = 75^2 + (b-a)^2$. On trouve
$(b-a)^2 = 85^2 - 75^2 = (85+75)\times(85-75) = 160\times 10 = 4^2\times 100 = (4\times 10)^2$
qui s'est ridiculisé ici en réclamant l'usage d'une calculatrice ?

On a la somme et la différence : $\begin{array}{ccccc} b & + & a & = & 160 \\ b & - & a & = & 40 \end{array}$ On résout : $\boxed{a = 60 \text{ et } b = 100}$

Equation avec des racines carrées. DS04

On part de $x - \sqrt{\frac{10}{x}} = 11$ (avec x strictement positif), et on fait passer 10 de l'autre côté : $x - 10 = 1 + \sqrt{\frac{10}{x}}$.

On arrange les choses : $x-10=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{10}}{\sqrt{x}}$.

On factorise le premier membre : $(x-\sqrt{10}).(x+\sqrt{10})=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{10}}{\sqrt{x}}$.

On simplifie par $\sqrt{x}+\sqrt{10}$ (strictement positif) : $(\sqrt{x}-\sqrt{10})=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

On effectue un produit en croix : $\boxed{x-\sqrt{10.x}=1}$
C'est l'entier cherché.

Un grand radical. DS04

Dans $\sqrt[4]{\sqrt{2}.\sqrt{4}.\sqrt{8}.\sqrt{16}\dots\sqrt{32768}}$ il y a des 2^k pour k de 1 à 16 (en effet, $2^{15}=2^{10}.2^5=1024\times 32=32768$).
On a donc $\left(\prod_{k=1}^{15}\sqrt{2^k}\right)^{1/4}$ qu'on écrit $\left(\prod_{k=1}^{15}2^{k/2}\right)^{1/4}$.

Finalement, en réunissant les exposants, on a $\dfrac{1}{8}.\sum\limits_{k=1}^{15}k$. Le cours nous dit que c'est $\dfrac{1}{8}.\dfrac{15.16}{2}$.

On simplifie il reste 15. Notre nombre est juste 2^{15} :

$$\sqrt[4]{\sqrt{2}.\sqrt{4}.\sqrt{8}.\sqrt{16}\dots\sqrt{32768}}=2^{15}=32\,768$$

Des triangles dont l'aire vaut 1. DS04

On nous a donné A et B. On connait le vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}$.
On note $(x,\ y)$ les coordonnées du point C. On demande que l'aire du triangle vaille 1.
C'est donc que l'aire du parallélogramme vaut 2. On en calcule l'aire par le déterminant $\det_2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
On demande donc $\begin{vmatrix}8 & x-5\\ 7 & y-3\end{vmatrix}=20$ (ou -20).
On dirait une identité de Bézout. $-7.x+8.y=9$ (et aussi $7.x-8.y=31$).

Et c'en est une.
Le cours nous dit comment en trouver une : $9.(-7.(1)+8.(1))=9$.
Mais aussi comment trouver toutes les autres : $-7.(8.n+9)+8.(9+7.n)=9$.

> *On rappelle en effet* : $(-7.x+8.y=9)\Leftrightarrow(-7.x+8.y=-7.9+8.9)$
> $(-7.x+8.y=9)\Leftrightarrow(8.(y-9)=7.(x-9))$
> 8 *divise donc* $7.(x-9)$, *par lemme de Gauss,* 8 *divise* $x-9$.
> $x-9$ *vaut* $8.n$ *donc* x *est égal à* $9+8.n$.

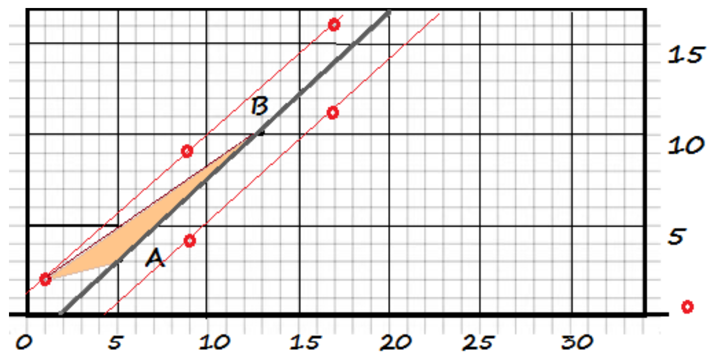
Nos points C sont donc de la forme $(8.n+9,\ 7.n+9)$.
Mais on a une contrainte : $0\leqslant 8.n+9\leqslant 34$ et $0\leqslant 7.n+9\leqslant 17$.
On re-formule : $-\dfrac{9}{8}\leqslant n\leqslant\dfrac{25}{8}$ et $-\dfrac{9}{7}\leqslant n\leqslant\dfrac{8}{7}$.
Comme n est entier, il n'y a que trois valeurs : -1, 0 et 1 : $C_0(1,\ 2)$ et $C_1(9,\ 9)$ et $C_2(17,\ 16)$.
En tout cas pour l'aire « positive ».

Les autres solutions vont venir de $7.x-8.y=31$.
Cette fois, une solution est $(-31,\ -31)$.
Les solutions sont $(8.p-31,\ 7.p-31)$.
Pour l'encadrement : $p=5$, $p=6$

On a finalement la liste des points :

$C_0(1,\ 2)$	$C_1(9,\ 9)$	$C_2(17,\ 16)$
$C_3(9,\ 4)$	$C_5(17,\ 11)$	

On peut les placer sur le graphe.



On pouvait aussi, en utilisant « base fois hauteur sur 2 » dire qu'il fallait trouver des points à distance de la droite (AB).
Il suffisait donc de tracer deux droites, et de donner la liste des points à coordonnées entières sur ces droites.

Décompositions. DS04

On veut décomposer 6 en sommes de trois entiers plus grands que 1, tous différents.
Quitte à classer ces trois entiers par ordre croissant, une telle somme vaut au moins $1+2+3$, ce qui fait déjà 6.
La seule somme possible est donc $1+2+3$. Les triplets sont $(1,2,3)$, mais aussi $(1,3,2)$, $(2,1,3)$ et ainsi de suite.

Bref, dans D_6 il y a six singletons formés des $\boxed{\text{six permutations du triplet initial } (1,2,3)}$

Pour D_7, on doit faire une somme de trois entiers distincts, comme $\boxed{1+2+4}$
On a donc des triplets tels que $(1,2,4)$ et ses variantes.
Peut on en avoir un autre, utilisant d'autres entiers.
Comme la somme doit valoir 7, les entiers sont strictement plus petits que 5.

Prenez trois entiers a, b et c de somme 7. Supposez les classés par ordre strictement croissant : $a < b < c$.
On a même $1 \leqslant a < b < c$. On a donc déjà $a+b \geqslant 1+2$. c ne peut donc dépasser 4.

Avec les entiers 1, 2, 3, 4 et 5, on ne pourra pas former plus d'un triplet.

On a donc D_7 qui n'est formé que des six permutations de $(1,2,4)$.
Et $s(7)$ vaut 1.

Pour 11, on doit prouver qu'on peut trouver un ensemble de deux triplets : $\{(a,b,c),\ (a',b',c')\}$ avec six entiers distincts, et les deux sommes $a+b+c$ et $a'+b'+c'$ valant 11.
On cherche un peu, et on trouve $\boxed{1+3+7 = 11 \text{ et } 2+4+5 = 11}$
Dans D_{11} il y a donc $\{(1,3,7),\ (2,4,5)\}$, mais aussi les paires faites de deux permutations de $(1,3,7)$ et de $(2,4,5)$.
Il y a six permutations de l'une et six permutations de l'autre. D'où 36 paires.

Mais il y a aussi des solutions à un seul triplet comme $\{(8,\ 2,\ 1)\}$ et ses six permutations internes.

Pourquoi majorer brutalement $s(n)$ par $\frac{n}{3}$?
Les décompositions de n en triplets (a,b,c) vérifiant $a+b+c$ utilisent des entiers strictement positifs. Ils sont donc aussi (strictement) plus petits que n.
On a donc n nombres à répartir dans des triplets.
Si on pouvait tous les utiliser, on aurait au plus $\frac{n}{3}$ triplets.
Et $s(n)$ est justement le nombre maximum de triplets.
Il est majoré par $\frac{n}{3}$.

Je doute qu'on puisse attendre $\frac{n}{3}$. Il faudrait pouvoir utiliser tous les entiers dans des sommes d'écritures toutes différentes.

On veut majorer $s(n)$ par $\left[\frac{2.n-3}{9}\right]$.
On pose donc $p = s(n)$. Ceci signifie qu'il y a une famille de p triplets faits d'entiers tous distincts, tel que la somme de chaque triplet vaille n.
p triplets, ça fait $3.p$ entiers.

Nommons les a_1 jusqu'à $a_{3.p}$ et supposons les maintenant triés par ordre croissant sans perte de généralité.

Par définition, a_1 est supérieur ou égal à 1.
Comme a_2 est strictement plus grand que a_1, on a $a_2 \geqslant 2$ et ainsi de suite.

En sommant, on a $\boxed{\sum_{k=1}^{3.p} a_k \geqslant \sum_{k=1}^{3.p} k}$ (ce que les élèves racontent en disant « au pire, ce sont les $3.p$ premiers entiers »).

Or, la somme $\sum_{k=1}^{3.p} k$ vaut $\frac{3.p.(3.p+1)}{2}$.

Mais dans le même temps, regroupés trois par trois, les a_k donnent n.
On a donc p triplets de somme n. leur somme vaut donc $p.n$.

On a finalement $\boxed{p.n = \sum_{k=1}^{3.p} a_k \geqslant \frac{3.p.(3.p+1)}{2}}$

On simplifie par p strictement positif : $n \geqslant \frac{9.p+3}{2}$.
On fait passer d'un seul côté : $9.p \leqslant 2.n - 3$.
L'entier p est majoré par $\frac{2.n-3}{9}$.

Et comme c'est un entier, il est plus petit que la partie entière de cet entier.

Comme en T.D., on part de $p \leqslant \frac{2.n-3}{9}$ et on passe à la partie entière (croissante) : $[p] \leqslant \left[\frac{2.n-3}{9}\right]$.
Mais comme p est entier : $p = [p] \leqslant \left[\frac{2.n-3}{9}\right]$.

Autre approche. p est un entier plus petit que $\frac{2.n-3}{9}$.
Et $\left[\frac{2.n-3}{9}\right]$ est le plus grand des entiers plus petits que $\frac{2.n-3}{9}$.
Par définition du « plus grand », on a donc $\leqslant \left[\frac{2.n-3}{9}\right]$.

Comme p est une notation allégée pour désigner $s(n)$ le temps de ce raisonnement, on a bien $s(n) \leqslant \left[\frac{2.n-3}{9}\right]$.

Ceci nous permet de retrouver des valeurs qui précèdent.

On doit répartir les entiers de 1 à $3.m$ en triplets. Il y aura donc m triplets.

Les triplets doivent avoir tous la même somme. Quelle sera-t-elle ? Notons la s.
Les m triplets ont la même somme, donc la somme totale vaudra $m.s$.
Mais la somme totale utilisera tous les entiers de 1 à $3.m$ une fois et une seule. sa valeur selon le cours est donc $\frac{3.m.(3.m+1)}{2}$.
En égalant, on a donc $m.s = \frac{3.m.(3.m+1)}{2}$.
On veut donc $s = \frac{3.(3.m+1)}{2}$ (entier car m est impair).

Les deux exemples peuvent donner une idée d'algorithme de remplissage.
On doit créer $2.p+1$ triplets.
On veut que les $2.p+1$ entiers de $4.p+3$ à $6.p+3$ soient chacun dans un triplet. On va donc en mettre un et un seul dans chaque triplet.
Dans la liste de $4.p+3$ à $6.p+3$, il y a « le triplet du milieu » : $5.p+3$.
Il reste donc deux lignes à compléter, avec les entiers de 1 à $2.(2.p+1)$ inclus.

$4.p+3$	$4.p+4$	$4.p+5$	...	$5.p+2$	$5.p+3$	$5.p+4$	$5.p+5$	...	$6.p+1$	$6.p+2$	$6.p+3$
					milieu						

On complète la colonne du milieu avec les valeurs $2.p+1$ et $2.p+2$. Le total est pour l'instant cohérent pour la colonne centrale.

$4.p+3$	$4.p+4$	$4.p+5$	...	$5.p+2$	$5.p+3$	$5.p+4$	$5.p+5$	...	$6.p+1$	$6.p+2$	$6.p+3$
					$2.p+2$						
					$2.p+1$						

On va compléter la dernière ligne, avec uniquement les entiers de 1 à $2.p+1$, avec un parcours un peu étrange, en croissant, avec un modulo pour remplier la ligne entière.

$4.p+3$	$4.p+4$	$4.p+5$	...	$5.p+2$	$5.p+3$	$5.p+4$	$5.p+5$	...	$6.p+1$	$6.p+2$	$6.p+3$
					$2.p+2$						
$p+1$	$p+2$	$p+3$	...	$2.p$	$2.p+1$	1	2	...	$p-2$	$p-1$	p

Pour l'instant, on a utilisé une fois et une seule chaque entier de 1 à $2.p+1$ et chaque entier de $4.p+3$ à $6.p+3$.
Ce sont deux listes bien distinctes, et il nous reste les entiers de $2.p+3$ à $4.p+2$ à placer.
Et on dispose d'une ligne presque entière pour ça.
Si on prend la i^{eme} colonne (i de 1 à p) elle contient pour l'instant $4.p+2+i$ et $p+i$.
Pour atteindre le total $9.p+6$, il lui manque $4.p+4-2.i$.
C'est un entier pair, entre $4.p+4-2.p$ et $4.p+4-2$, c'est à dire justement entre $2.p+3$ et $4.p+2$.
Et tous ces entiers sont différents.

$4.p+3$	$4.p+4$	$4.p+5$	...	$5.p+2$	$5.p+3$	$5.p+4$	$5.p+5$	...	$6.p+1$	$6.p+2$	$6.p+3$
$4.p+2$	$4.p$	$4.p-2$	...	$2.p+4$	$2.p+2$						
$p+1$	$p+2$	$p+3$	...	$2.p$	$2.p+1$	1	2	...	$p-2$	$p-1$	p

Passons à la moitié droite.
On va cette fois utiliser les entiers impairs entre $2.p+3$ et $4.p+2$.

$4.p+3$	$4.p+4$	$4.p+5$	...	$5.p+2$	$5.p+3$	$5.p+4$	$5.p+5$	...	$6.p+1$	$6.p+2$	$6.p+3$
$4.p+2$	$4.p$	$4.p-2$	...	$2.p+4$	$2.p+2$	$4.p+1$	$4.p-1$	...	$2.p+7$	$2.p+5$	$2.p+3$
$p+1$	$p+2$	$p+3$	...	$2.p$	$2.p+1$	1	2	...	$p-2$	$p-1$	p

Cette fois, c'est bon, ils y sont tous, et la somme est la bonne à chaque fois.

Peut être avez vous un autre algorithme.
Sincèrement, j'ai hâte de voir.

On va déduire la valeur de s_{24}, car dans un tableau offert, toutes les sommes de triplets valent 24.

11	+ 10	+ 3	= 24
12	+ 8	+ 4	= 24
13	+ 6	+ 5	= 24
14	+ 9	+ 1	= 24
15	+ 7	+ 2	= 24

Et on a cinq triplets.
Une solution avec cinq triplets fonctionne : $s(24) \geqslant 5$.
Mais on a aussi majoré à la question presque précédente : $s(n) \leqslant \left[\frac{2.n-3}{9}\right]$ donc $s_{24} \leqslant \left[\frac{45}{9}\right] = 5$.
Finalement, $s(24)$ vaut 5.

On pouvait utiliser aussi l'autre famille de triplets pour avoir $s(33) = 7$. On l'a pour l'exemple. Et on sait qu'on ne pourra pas le dépasser.

15	16	17	18	19	20	21
14	12	10	8	13	11	9
4	5	6	7	1	2	3

Mais qu'en est il de $s(25)$?
On a encore $s_{25} \leqslant \left[\frac{47}{9}\right] = 5$.
Ignorant si la fonction s est croissante, on ne peut pas conclure trop vite.

Mais en modifiant la grille

11	+ 10	+ 3	= 24
12	+ 8	+ 4	= 24
13	+ 6	+ 5	= 24
14	+ 9	+ 1	= 24
15	+ 7	+ 2	= 24

on obtient en ajoutant 1 :

12	+ 10	+ 3	= 25
13	+ 8	+ 4	= 25
14	+ 6	+ 5	= 25
15	+ 9	+ 1	= 25
16	+ 7	+ 2	= 25

Le 1 a été ajouté sur les premiers, déjà tous distincts, et dépassant n'importe quel nombre des deux autres colonnes.
Les quinze entiers sont tous distincts.
Avec le même schéma, on prouve $s(26) = s(27) = s(28) = 5$:

11	+ 10	+ 3	= 24	12	+ 10	+ 3	= 25	13	+ 10	+ 3	= 26	14	+ 10	+ 3	= 27	15	+ 10	+ 3	= 28
12	+ 8	+ 4	= 24	13	+ 8	+ 4	= 25	14	+ 8	+ 4	= 26	15	+ 8	+ 4	= 27	16	+ 8	+ 4	= 28
13	+ 6	+ 5	= 24	14	+ 6	+ 5	= 25	15	+ 6	+ 5	= 26	16	+ 6	+ 5	= 27	17	+ 6	+ 5	= 28
14	+ 9	+ 1	= 24	15	+ 9	+ 1	= 25	16	+ 9	+ 1	= 26	17	+ 9	+ 1	= 27	18	+ 9	+ 1	= 28
15	+ 7	+ 2	= 24	16	+ 7	+ 2	= 25	17	+ 7	+ 2	= 26	18	+ 7	+ 2	= 27	19	+ 7	+ 2	= 28

Ces tableaux disent $s_n \geqslant 5$ puisqu'on arrive à trouver 5 triplets.
Et la majoration $s_n \leqslant \left[\dfrac{2.n-3}{9}\right]$ disent qu'on ne pourra pas faire mieux.

On généralise l'idée à la question suivante.
Si $\left[\dfrac{2.n-3}{9}\right]$ est impair, on le note $2.m+1$.
On réalise un tableau à $2.m+1$ colonnes comme ci dessus.
En ajoutant ce qu'il faut aux éléments de la première ligne pour atteindre n, on a $2.m+1$ triplets de somme n, formés d'entiers tous distincts.

Le sujet de concours [1] allait plus loin et démontrait $s(n) = \left[\dfrac{2.n-3}{9}\right]$ en étudiant aussi le cas « pair » et en demandant de trouver alors une autre façon de répartir des entiers dans des cases.

Intégrale. DS04

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin(x+\sin(x)) - \sin(x-\sin(x)).dx$ existe par un argument de continuité.

Ensuite, on peut développer $\begin{array}{rcll} \sin(x+\sin(x)) & = & \sin(x).\cos(\sin(x)) & +\cos(x).\sin(\sin(x)) \\ \sin(x+\sin(x)) & = & \sin(x).\cos(\sin(x)) & -\cos(x).\sin(\sin(x)) \end{array}$ puis soustraire.

Sous le signe somme, on a $2.\sin(\sin(x)).\cos(x)$ [2].
On identifie une forme en $2.\sin(u).u'$. On peut intégrer

$$\int_0^{\pi/2} (\sin(x+\sin(x)) - \sin(x-\sin(x)).dx = 2.\int_0^{\pi/2} \sin(\sin(x)).\cos(x).dx = 2.\Big[-\cos(\sin(x))\Big]_0^{\pi/2}$$

.
On trouve un improbable $\boxed{2.(1-\cos(1))}$

Il ne fallait pas séparer les deux intégrales.

Sommes d'inverses d'entiers. DS04

Si on parle de $k \longmapsto S_{n,k}$ c'est que n est fixé. On calcule donc $S_{n,k+1} - S_{n,k}$. Il y a juste $\displaystyle\sum_{p=1}^{k+1} \frac{1}{p^{2.n}}$ et $\displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p^{2.n}}$. L'une a un terme de plus. La relation de Chasles donne $S_{n,k+1} - S_{n,k} = \frac{(k+1)^{2.n}}{}$.C'est positif.
La suite est croissante.

C'est toujours le cas avec les séries à termes positifs $A_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_k$ avec des a_n positifs.

On va majorer terme à terme.
On nous propose de démontrer déjà $\dfrac{2.n-1}{(k+1)^{2.n}} \leqslant \dfrac{1}{k^{2.n-1}} - \dfrac{1}{(k+1)^{2.n-1}}$. C'est en fait une comparaison d'aires pour un rectangle et une intégrale.
Étudions $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{2.n}}$ et $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{p^{2.n}}$.
Pour tout t de $[k,\ k+1]$, on a $t \leqslant k+1$ puis $0 < t^{2.n} \leqslant (k+1)^{2.n}$ et $\dfrac{1}{(k+1)^{2.n}} \leqslant \dfrac{1}{t^{2.n}}$.

---

1. E.N.S. 2° année sur concours pour élèves hors-prépas, épreuve dite de « culture générale mathématique », trois exercices de ce type
2. on y accède aussi par $\sin(p) - \sin(q) = 2.\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right).\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$ qui utilise les mêmes ressorts

On intègre de $k-1$ à k : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{(k+1)^{2.n}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{2.n}}$.

On intègre d'un côté une constante, et de l'autre avec $t \longmapsto \dfrac{t^{1-2.n}}{1-2.n}$.

$$\frac{1}{(k+1)^{2.n}} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{(k+1)^{2.n}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{2.n}} = \frac{1}{2.n-1}.\Big(\frac{1}{k^{2.n-1}} - \frac{1}{(k+1)^{2.n-1}}\Big)$$

Mais comment je pense à ça tout seul en début de Prépas ?
Difficilement, je le reconnais.
J'espère qu'en fin de Prépas, ce sera un réflexe classique, car c'est une des multiples « belles petites idées de Sup ».

Une fois acquis cette majoration $\dfrac{1}{(k+1)^{2.n}} \leqslant \dfrac{1}{2.n-1}.\Big(\dfrac{1}{k^{2.n-1}} - \dfrac{1}{(k+1)^{2.n-1}}\Big)$, on l'utilise de 1 à $p-1$:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{(k+1)^{2.n}} \leqslant \frac{1}{2.n-1}.\sum_{k=1}^{p-1}\Big(\frac{1}{k^{2.n-1}} - \frac{1}{(k+1)^{2.n-1}}\Big) = \frac{1}{2.n-1}.\Big(\frac{1}{1^{2.n-1}} - \frac{1}{(p-1+1)^{2.n-1}}\Big) = \frac{1}{2.n-1}.\Big(1 - \frac{1}{p^{2.n-1}}\Big) \leqslant \frac{1}{2.n-1}$$

Dans la majoration, on a vu une somme télescopique, et on a laissé tomber un terme négatif pour avoir un majorant ne dépendant pas de p.

On décale les termes, puis on ajoute le terme qui manque[3] : $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^{2.n}} \leqslant \frac{1}{1^{2.n}} + \frac{1}{2.n-1}$.

Le majorant ne dépend pas de p. C'est ce qu'on appelle effectivement « majore la suite $k \longmapsto S_{n,k}$ ».

La suite est croissante majorée, elle converge lorsque p tend vers l'infini.

Mais on ne sait rien de sa limite, hormis $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2.n}} \leqslant 1 + \frac{1}{2.n-1}$.
Mais ce serait bien le diable que ce majorant grossièrement obtenu soit le plus petit majorant (limite de la suite croissante).

Tiens, mais pouvait on prouver l'inégalité $\dfrac{2.n-1}{(k+1)^{2.n}} \leqslant \dfrac{1}{k^{2.n-1}} - \dfrac{1}{(k+1)^{2.n-1}}$ sans comparaison série intégrale ?

Le second membre vaut $\dfrac{(k+1)^{2.n-1} - k^{2.n-1}}{k^{2.n-1}.(k+1)^{2.n-1}}$.

On développe $(k+1)^{2.n-1}$ par la formule du binôme $(k+1)^{2.n-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{2.n-1} \binom{2.n-1}{i}.k^i$.

On isole le terme d'indice $2.n-1$: $(k+1)^{2.n-1} - k^{2.n-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{2.n-2} \binom{2.n-1}{i}.k^i$.

On sort encore un terme, et tout le reste est positif :

$$(k+1)^{2.n-1} - k^{2.n-1} = \sum_{i=0}^{2.n-2} \binom{2.n-1}{i}.k^i = \binom{2.n-1}{2.n-2}.k^{2.n-2} + \sum_{i=0}^{2.n-3} \binom{2.n-1}{i}.k^i \geqslant \binom{2.n-1}{2.n-2}.k^{2.n-2} = (2.n-1).k^{2.n-2}$$

On divise et on surveille les exposants :

$$\frac{1}{k^{2.n-1}} - \frac{1}{(k+1)^{2.n-1}} \geqslant \frac{(2.n-1).k^{2.n-2}}{k^{2.n-1}.(k+1)^{2.n-1}} = \frac{2.n-1}{k.(k+1)^{2.n-1}} \geqslant \frac{2.n-1}{(k+1).(k+1)^{2.n-1}} = \frac{2.n-1}{(k+1)^{2.n}}$$

C'était jouable. Sinon, on pouvait aussi utiliser l'inégalité de Bernoulli (justement), croisée en TD et en Terminale : $(1+x)^N \geqslant 1 + N.x$.
Et je me demande si on peut utiliser la formule de Taylor...

On se donne n , et on veut comparer ensuite Z_{n+1} et Z_n. les deux sont des sommes infinies, mais elles existent, c'est déjà ça.

Comme chaque $k^{2.n}$ est au dénominateur, on a $\dfrac{1}{k^{2.n+2}} \leqslant \dfrac{1}{k^{2.n}}$ pour tout k . On somme de 1 à p :

$$S_{n+1,p} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^{2.n+2}} \leqslant \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^{2.n}} = S_{n,p}$$

3. Leterme manque ! il faudra que je pointe ça sur ProNote

On fait tendre p vers l'infini : $Z_{n+1} = \lim_{p \to +\infty} S_{n+1,p} \leqslant \lim_{p \to +\infty} S_{n,p} = Z_n$.

Cela dit, il me semble logique d'avoir $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3'} + \frac{1}{4^k} + \ldots \leqslant 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$, *« terme à terme ».*

On doit ensuite comparer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ (la seconde, c'est S_2).
Dans l'une les signes alternent. dans l'autre il n'y a que des plus.
D'un côté $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \ldots$ et de l'autre : $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots$.
Leur somme ne contiendra que les termes « impairs ».

J'ai plus envie de regarder leur différence :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^{k+1}}{k^2} = 2. \sum_{\substack{1 \leqslant k \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 2. \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2.p)^2} = 2.\frac{1}{4}. \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$$

Comme on somme jusqu'à l'infini, il reste les mêmes sommes : $Z_1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{1}{2}.Z_1$.

La moiti $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{1}{2}.Z_1$

Si on admet $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$.
on a alors $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}$.

Polynômes de Bernoulli. DS04

Allez, des classiques. C'est parti.
A chaque étape, on intègre : $(B_n)' = n.B_{n-1}$, donc formellement : $B_n = n. \int B_{n-1} + C^{te}$ et la constante est déterminée par $\int_0^1 B_n(t).dt = 0$.

Il y a une infinité de primitives possibles, mais le choix de la constante d'intégration est imposé par la condition intégrale.

On vérifie le cadeau fait par l'énoncé : $B_1 = X - \frac{1}{2}$ donc $(B_1)' = 1 = B_0$ et $\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right).dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2} = 0$.
C'est le bon polynôme (il ne peut y en avoir qu'un).

Pour B_2, on multiplie par 2 : $2.B_1 = 2.X - 1$
on intègre de 0 à x : $B_2(x) = x^2 - x + B_2(0)$
on détermine $B_2(0)$ par la condition $\int_0^1 (x^2 - x + B_2(0)).dx = 0$. On trouve $B_2(0) = \frac{1}{6}$.

Vous ne m'avez pas vu écrire $B_2(x) = x^2 - x + C^{te}$ *et déterminer ma « constante » par la condition.*
Et vous ne me verrez jamais le faire.
Pour moi c'est contraire à mon sens physique qui me dit « tu intègres d'un état initial à un état final ».

On pouvait faire l'étape suivante : multiplier par 3, intégrer et ajuster.

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4
1	$X - \frac{1}{2}$	$X^2 - X + \frac{1}{6}$	$X^3 - \frac{3}{2}.X^2 + \frac{X}{2}$	$X^4 - 2.X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$
1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$

A chaque étape, on doit intégrer : $(B_n)' = n.B_{n-1}$.
Si B_{n-1} était de degré $n-1$ (hypothèse de récurrence), alors $B_n$est de degré n (conclusion de récurrence).

On a donc par récurrence immédiate sur n : B_n est de degré n.

Même si la question n'est pas posée : chaque $B_n$est à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

La formule $B_n(1) = b_n$ est un cadeau si on la prend par le bon bout (c'est à dire pas par récurrence) :

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 (B_n)'(t).dt = \int_0^1 n.B_{n-1}(t).dt = n.\int_0^1 B_{n-1}(t).dt = 0$$

B_n prend la même valeur en 1 et en 0. Et cette valeur est b_n.

Et ce résultat est d'ailleurs aussi valable pour n égal à 0 *(fonction constante). Mais c'est seulement à partir de* 1 *qu'on eut faire intervenir* $\int_0^1 B_{n-1}(t).dt = 0$.

En dérivant deux fois : $(B_n)'' = (n.B_{n-1})' = n.(n-1).B_{n-2}$.
On propose vite : $(B_n)^{(k)} = n.(n-1)\dots(n-k+1).B_{n-k}$.
Oui, $n-k+1$, mais il suffit de retenir qu'il faut k termes.

On peut démontrer ce résultat par récurrence. mais on écrit déjà plus proprement $(B_n)^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}.B_{n-k}$.

On se donne k et on suppose la propriété vraie au rang k. On re-dérive :

$$(B_n)^{(k+1)} = ((B_n)^{(k)})' = \frac{n!}{(n-k)!}.(B_{n-k})' = \frac{n!}{(n-k)!}.(n-k).B_{n-k-1} = \frac{n!}{\dfrac{(n-k)!}{n-k}}.B_{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!}.B_{n-k-1}$$

On peut aussi proposer une récurrence sur n. Mais pas à k fixé. La propriété P_n est alors : $\forall k,\ (B_n)^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}.B_{n-k}$.
On regarde au rang $n+1$ et on veut dériver B_{n+1} k fois. Il suffit de dériver une fois, on tombe sur $(n+1).B_n$ et on dérive $k-1$ fois avec l'hypothèse de récurrence.,.

L'heure est venue pour nous d'écrire la formule de Taylor avec reste intégrale pour B_n entre 0 et x à l'ordre n.
Mais comme on l'écrit à l'ordre de son degré, elle tombe juste, le reste intégrale est nul.

$$B_n(x) = B_n(0+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(B_n)^{(k)}(0)}{k!}.x^k + 0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\dfrac{n!}{(n-k)!}.B_{n-k}(0)}{k!}.x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!.b_{n-k}}{k!.(n-k)!}.x^k$$

On l'écrit formellement comme un polynôme $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.b_{n-k}.X^k$ mais on va l'appliquer en 0 et en 1 pour voir.
Pourquoi 0 parce que c'est la définition : $b_n = B_n(0)$. Mais c'est bien ce que donne la formule directe, perdant tous les termes.

On l'applique aussi en 1 pour avoir une somme de $\binom{n}{k}.b_{n-k}.1^k$.
Et aussi parce qu'on a prouvé $B_n(1) = B_n(0) = b_n$.
On a donc $b_n = B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.b_{n-k}$.
Mais dans le membre de droite, le terme $k = 0$ donne justement b_n.
Il reste $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.b_{n-k} = 0$.
Isolons le terme $k = 1$ à présent : $\binom{n}{1}.b_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}.b_{n-k} = 0$.
Si on se souvient que $\binom{n}{1}$ vaut 1, ça ressemble vraiment à la formule $b_{n-1} = -\dfrac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k}.b_k$.

Pour l'instant, j'ai $n.b_{n-1} = -\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}.b_{n-k}$.

Je propose de poser $p = n-k$. Il va aller de 0 à $n-2$ et on aura la somme des $\binom{n}{n-p}.b_p$.

Mais la symétrie de la ligne du triangle de Pascal permet de remplacer $\binom{n}{n-p}$ par $\binom{n}{p}$.

Pour la suite, on va l'écrire $b_n = -\frac{1}{n+1}.\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n+1}{p}.b_p$.

C'est cette formule qui va permettre de calculer les b_k de proche en proche.
Une fois n donné, on va initialiser la liste avec b_0 égal à 1.
Ensuite, on va allonger la liste n fois, en calculant à chaque itération le nouveau terme comme une somme.

```
def Bernoulli(n) :
....B = [1]
....for k in range(n) :
........S = 0 #on initialise une somme
........for p in range(k) #on va sommer de 0 à k-1 inclus
............S += binomial(k+1,p)*b[p] #on profite de ceux déjà calculés
........S = -S/(k+1) #on le divise
........B.append(S)
....return(B)
```

Bon, il y a un problème, on trouve des flottants.
Il faudrait un module pour travailler sur des rationnels. Vous avez ça ?

Ensuite, on peut créer sa fonction binomial.
Si on a une approche lourde lourde lourde, on utilise des factorielles.

```
def fact(n) :
....P = 1
....for k in range(n) :
........P *= k+1
....return(P)
```

```
def Binomial(n, k) :
....return(Facto(n)//(Facto(k)*Facto(n-k)))
```

Ça marche mais c'est indigne car ça calcule des termes partout pour les simplifier après. Savez vous que pour $\binom{8}{2}$ vaut calculez ici $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.1.2.3.4.5.6}$ au lieu de calculer $\frac{8.7}{1.2}$!

```
def Binom(n, k) :
....B = 1
....for i in range(k) :
........B = B*(n-k)//(k+1)
....return(B)
```

```
def Binom(n, k) :
....if k > n//2 :
........return(Binom(n, n-k))
....B = 1
....for i in range(k) :
........B = B*(n-k)//(k+1)
....return(B)
```

Et la bonne solution va consister à fabriquer le binomial au fur et à mesure du calcul de la somme en fait :

```
def Bernoulli(n) :
....B = [1]
....for k in range(n) :
........S, binom = 0, 1 #on initialise une somme
........for p in range(k) #on va sommer de 0 à k-1 inclus
............S += binom*b[p] #on profite de ceux déjà calculés
............binom = binom*(n+2-k)//(k+1) #on actualise le binomial
........S = -S/(k+1) #on le divise
........B.append(S)
....return(B)
```

Des intégrales avec des cosinus. DS04

On va faire sans le dire une décomposition en séries de Fourier. Les coefficients de Fourier sont les a_k.

On calcule les $a_k(0)$. C'est à dire qu'on prend l'application B_0 (calculée en t ou en $\dfrac{t}{2.\pi}$, ça ne change pas grand chose.

On a donc $a_k(0) = \dfrac{1}{\pi}.\displaystyle\int_0^{2.\pi} \cos(k.t).dt = \dfrac{1}{\pi}.\Big[\dfrac{\sin(k.t)}{k}\Big]_0^{2;\pi} = 0$.

Sauf pour k égal à 0 quand même ! On ne peut pas mettre un 0 au dénominateur.

On a donc $a_0(0) = \dfrac{1}{\pi}.\displaystyle\int_0^{2.\pi} 1.dt = \dfrac{2.\pi}{\pi} = 1$.

Pour les $a_k(1)$, on se méfie aussi de $k = 0$:

$$a_0(1) = \frac{1}{\pi}.\int_0^{2.\pi} B_2\Big(\frac{t}{2.\pi}\Big).dt = \frac{1}{\pi}.\int_0^1 B_2(x).(2.\pi).dx = 2.\int_0^1 B_1(x).dx = 0$$

Ensuite, tout va bien

$$\pi.a_k(1) = \int_0^{2.\pi} \Big(\frac{t}{2.\pi} - \frac{1}{2}\Big).\cos(k.t).dt = \Big[B_2\Big(\frac{t}{2.\pi}\Big).\frac{\sin(k.t)}{k}\Big]_0^{2.\pi} - \frac{1}{k.\pi}.\int_0^{2.\pi} B_1\Big(\frac{t}{2.\pi}\Big).\sin(k.t).dt$$

Vous avez reconnu une intégration par parties

$B_2\Big(\dfrac{t}{2.\pi}\Big)$	$\hookrightarrow$	$2.\dfrac{1}{2.\pi}.B_1\Big(\dfrac{t}{2.\pi}\Big)$
$\cos(k.t)$	$\hookleftarrow$	$\dfrac{\sin(k.t)}{k}$

On en refait une

$B_1\Big(\dfrac{t}{2.\pi}\Big)$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{1}{2.\pi}.B_0\Big(\dfrac{t}{2.\pi}\Big) = \dfrac{1}{2.\pi}$
$\sin(k.t)$	$\hookleftarrow$	$-\dfrac{\cos(k.t)}{k}$

Cette fois, le terme intégrale $\dfrac{1}{2.k.\pi}\displaystyle\int_0^{2.\pi} \cos(k.t).dt$ est nul (intégrez en sinus, ou voyez le cosinus sur un nombre entier de périodes).

$$\pi.a_k(1) = -\frac{1}{k.\pi}.\int_0^{2.\pi} B_1\Big(\frac{t}{2.\pi}\Big).\sin(k.t).dt = -\frac{1}{k.\pi}.\Big[-B_1\Big(\frac{t}{2.\pi}\Big).\frac{\cos(k.t)}{k}\Big]_0^{2.\pi} - \int_0^{2.\pi} \frac{\cos(k.t)}{k^2.2.\pi^2}.dt$$

Rappelons ensuite que $B_1(1)$ vaut $\dfrac{1}{2}$ et $B_1(0)$ vaut $-\dfrac{1}{2}$ tandis que $\cos(2.k.\pi)$ et $\cos(0)$ valent 1.

Bref, $\pi.a_k(1) = \frac{1}{k.\pi}.\Big[\frac{1}{2.k} - \frac{-1}{2.k}\Big]$. pas peu fier, j'encadre : $\boxed{a_k(1) = \frac{1}{k^2.\pi^2}}$

Et je résume :

	$k > 0$
$a_0(0) = 1$	$a_k(0) = 1$
$a_0(1) = 0$	$a_k(1) = \dfrac{1}{k^2.\pi^2}$

Cette intégration par parties sans laquelle on ne pouvait calculer les $a_1(k)$ va nous servir pour la relation $a_k(n) = \dfrac{n}{(k.\pi)^2}.(B_{2.n-1}(1) - B_{2.n-1}(0)\Big) - \dfrac{2.n.(2.n-1)}{(2.k.\pi)^2}.a_k(n-1)$ vers laquelle les $B_{2.n-1}(1) - B_{2.n-1}(0)$ nous poussaient d'ailleurs.

Partons de la définition : $\pi.a_k(n) = \displaystyle\int_0^{2.\pi} B_{2.n}\Big(\dfrac{t}{2.\pi}\Big).\cos(k.t).dt$ et choisissons nos parties

$B_{2.n}\Big(\dfrac{t}{2.\pi}\Big)$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{2.n}{2.\pi}.B_{2.n-1}\Big(\dfrac{t}{2.\pi}\Big)$
$\cos(k.t)$	$\hookleftarrow$	$\dfrac{\sin(k.t)}{k}$

Le terme crochet est nul en 0 et en $2.\pi$ grâce à ses sinus : $\pi.a_k(n) = -\dfrac{n}{k.\pi}\displaystyle\int_0^{2.\pi} B_{2.n}\Big(\dfrac{t}{2.\pi}\Big).\cos(k.t).dt$.

On recommence ?

$B_{2.n-1}\Big(\dfrac{t}{2.\pi}\Big)$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{2.n-1}{2.\pi}.B_{2.n-2}\Big(\dfrac{t}{2.\pi}\Big)$
$\sin(k.t)$	$\hookleftarrow$	$-\dfrac{\cos(k.t)}{k}$

$$\pi.a_k(n) = -\frac{n}{k.\pi}.\Big(-\Big[B\Big(\frac{t}{2.\pi}\Big).\frac{\cos(k.t)}{k}\Big] + \frac{2.n-1}{2.k.\pi}.\int_0^{2.\pi} B_{2.n-2}\Big(\frac{t}{2.\pi}\Big).\cos(k.t).dt\Big)$$

Le crochet hérite d'un signe plus. Ses cosinus valent 1. Le terme de compensation garde un moins, et redonne un $a_{truc}(bidule)$ (on a des $B_{2.n-2}$ c'est donc du g_{n-1} et c'est bien $a_k(n-1)$).

$$\pi.a_k(n) = \frac{n}{k^2.\pi}.(B_{2.n-1}(1) - B_{2.n-1}(0)) - \frac{n}{k.\pi}.\frac{2.n-1}{2.k.\pi}.\pi.a_k(n-1)$$

On pouvait d'ailleurs utiliser cette formule pour calculer les $a_k(1)$ à partir des $a_k(0)$ déjà connus.

Cette formule semble lourde ? Mais on simplifie :

$$(B_{2.n-1}(1) - B_{2.n-1}(0)) = \int_0^1 (B_{2.n-1})'(t).dt = \int_0^1 (2.n-1).B_{2.n-2}(t).dt = 0$$

(on a intégré la dérivée, on a utilisé deux hypothèses sur les polynômes de Bernoulli). Il reste

$$\pi.a_k(n) = -\frac{n}{k.\pi}.\frac{2.n-1}{2.k.\pi}.\pi.a_k(n-1)$$

et on va pouvoir mener une récurrence sur n, à k fixé.

Comme on nous propose la formule $a_k(n) = \dfrac{(-1)^{n-1}.(2.n)!}{2^{2.n-1}.(k.\pi)^{2.n}}$, ne faisons pas la fine bouche, et démontrons la par récurrence sur n.

Pour n égal à 1, on a bien $a_k(1) = \dfrac{(-1)^{1-1}.(2.1)!}{2^{2.1-1}.(k.\pi)^{2.1}}$ puisque $a_k(1) = \dfrac{1}{k^2.\pi^2}$.

On se donne un entier n quelconque, et on suppose la formule vraie au rang n : $a_k(n) = \dfrac{(-1)^{n-1}.(2.n)!}{2^{2.n-1}.(k.\pi)^{2.n}}$.
Mais le résultat de l'intégration par parties donnait :

$$a_k(n+1) = -\frac{n+1}{k.\pi}.\frac{2.n+1}{2.k.\pi}.a_k(n)$$

On reporte, on simplifie les $(-1)^{n-1}$ et on met $n+1$ sous la forme $\dfrac{2.n+2}{2}$:

$$a_k(n+1) = -\frac{n+1}{k.\pi}.\frac{2.n+1}{2.k.\pi}.a_k(n) = -\frac{n+1}{k.\pi}.\frac{2.n+1}{2.k.\pi}.\frac{(-1)^{n-1}.(2.n)!}{2^{2.n-1}.(k.\pi)^{2.n}} = \frac{2.n+2}{2.k.\pi}.\frac{2.n+1}{2.k.\pi}.\frac{(-1)^{n}.(2.n)!}{2^{2.n-1}.(k.\pi)^{2.n}}$$

Le numérateur est bien devenu $(-1)^{n+1-1}.(2.n+2)!$ (rappelons que pour passer de $(2.n)!$ à $(2.n+2)!$ on a besoin de deux termes.
Le numérateur est bien devenu $2^{2.n+1}.(k.\pi)^{2.n+2}$.
La formule est établie par récurrence.

Travail sur des séries de Fourier. DS04

Pour trouver $2.\Big(\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{p} \cos(k.t)\Big).\sin\Big(\dfrac{t}{2}\Big) = \sin\Big(\dfrac{2.p+1}{2}.t\Big)$, on a trois méthodes, plus ou moins rusées.

Commençons par la récurrence sur p.
Pour p nul, on a $2.\Big(\dfrac{1}{2} + 0\Big).\sin\Big(\dfrac{t}{2}\Big) = \sin\Big(\dfrac{2.0+1}{2}.t\Big)$. C'est vrai.

Supposons la formule vraie à un rang n et ajoutons $2.\cos((p+1).t).\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ de chaque côté.

$2.\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{p+1}\cos(k.t)\Big).\sin\left(\frac{t}{2}\right)=\sin\left(\frac{2.p+1}{2}.t\right)+2.\cos((p+1).t).\sin\left(\frac{t}{2}\right)$

On aurait voulu obtenir $\sin\left(\frac{2.p+3}{2}.t\right)$.

Il suffit de comparer $\sin\left(\frac{2.p+3}{2}.t\right)-\sin\left(\frac{2.p+1}{2}.t\right)=2.\cos((p+1).t).\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ par la formule $\sin(a)-\sin(b)=2.\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Ou il suffit de bricoler avec des $\cos(a+b)$ et autres.

On retrouve la même idée dans la troisième preuve par somme télescopique.

Continuons avec la formule de Moivre.

$$2.\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{p}\cos(k.t)\Big)=2.\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{i.k.t}+e^{-i.k.t}}{2}\Big)=1+\sum_{k=1}^{n}e^{i.k.t}+\sum_{q=-1}^{-n}e^{i.q.t}=\sum_{k=-n}^{n}e^{i.k.t}$$

oh la ruse. On a replié en deux la somme des cosinus : exponentielles k positif, exponentielles k négatif, avec le 1 juste au milieu !

On a maintenant une série géométrique de raison $e^{i.t}$, elle vaut $\dfrac{e^{-i.n.t}-e^{i.(n+1).t}}{1-e^{i.t}}$.

On multiplie par $e^{-i.t/2}$ en haut et en bas : $\dfrac{e^{-i.n.t-\frac{i.t}{2}}-e^{i.n.t+\frac{i.t}{2}}}{e^{-i.\frac{t}{2}}-e^{i.\frac{t}{2}}}$ et on a les deux sinus attendus.

Cette somme porte ne nom de noyau de Dirichlet.
Vous connaitrez le nom de Dirichlet.
Vous ne chercherez pas à comprendre le mot « noyau ».

Terminons avec le trigonométrie classique.

$2.\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{p}\cos(k.t)\Big).\sin\left(\frac{t}{2}\right)=\sin\left(\frac{t}{2}\right)+\sum_{k=1}^{p}2.\cos(k.t).\sin\left(\frac{t}{2}\right)=\sin\left(\frac{t}{2}\right)+\sum_{k=1}^{p}\left(\sin\left(k.t+\frac{t}{2}\right)-\sin\left(k.t-\frac{t}{2}\right)\right)$

C'est une somme télescopique, et il ne reste qu'un terme : $\sin\left(n.t+\frac{t}{2}\right)$.