Couples de suites récurrentes

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & a.u_n & + & b.v_n \\ v_{n+1} & = & c.v_n & + & d.v_n \end{array}\right|$$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$U_{n+1} = M.U_n$$

Suites récurrentes linéaires

$$u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n \qquad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$v_{n+3} = a.v_{n+2} + b.v_{n+1} + c.v_n \qquad \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ v_{n+2} \\ v_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \\ v_{n+2} \end{pmatrix}$$

Généraliser à l'ordre n

Équations différentielles linéaires homogènes

$$y_t'' = a.y_t' + b.y_t \qquad \begin{pmatrix} y_t' \\ y_t'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_t \\ y_t' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} y_t \\ y_t' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_t' \\ v_t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$$

généralisation à l'ordre 3 et plus

la diagonalisation cachée

$$Tr(m) = Tr(D) \qquad = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\det(M) = \det(D) \qquad = \lambda_1.\lambda_2$$

$$X^2 - S.X + P = X^2 - Tr(M).X + \det(M)$$

on choisit $\quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

on résout systèmes $\quad M.P = P.D \qquad M.U = \lambda.U$

$$\boxed{M = P.D^n.P^{-1}\ ,\ M.P = P.D,\ D = P^{-1}.M.P}$$

$Tr(M) = \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

$Tr(Com(M)) = \qquad \lambda_1.\lambda_2 + \lambda_1.\lambda_3 + \lambda_2.\lambda_3$

$\det(M) = \qquad \lambda_1.\lambda_2.\lambda_3$

polynôme caractéristique

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda.I_3 - M)$$

cas non diagonalisable : $\lambda_1 = \lambda_2$

poser $D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ trouver P

Couples de suites récurrentes.

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P. \begin{pmatrix} (\lambda_1)^n & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

combinaisons de suites géométriques

chercher l'équivalent quand n tend vers $+\infty$

Suites récurrentes linéaires

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = P. \begin{pmatrix} (\lambda_1)^n & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^n \end{pmatrix} .P^{-1}. \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

combinaison de suites géométriques

λ_1 et λ_2 racines de $X^2 = a.X + b$

Équations différentielles linaires

combinaison de $t \mapsto e^{\lambda_1.t}$ et $t \mapsto e^{\lambda_2.t}$

combinaison de $t \mapsto e^{\nu.t}.\cos(\omega.t)$ et $t \mapsto e^{\nu.t}.\sin(\omega.t)$ si $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \nu + i.\omega$

combinaison de $t \mapsto e^{\lambda.t}$ et $t \mapsto t.e^{\lambda.t}$ si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

---

1) Les λ_k sont appelés « valeurs propres ».

Le polynôme $\det(\lambda.I_n - M)$ est appelé « polynôme caractéristique ». Ses racines sont justement les valeurs propres.
En dimension 2, c'est effectivement $\lambda^2 - Tr(M).\lambda + \det(M)$.
En dimension n, on connaît deux coefficients sans effort : $\lambda^n - Tr(M).\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n.\det(M)$. Les autres sont nanmoins calculables.

Les colonnes de P sont formées de vecteurs propres, solutions non nulles de $M.U = \lambda.U$, en quantité suffisante si on a la chance d'avoir n valeurs propres distinctes (n étant le format de la matrice carrée M qu'on diagonalise).
Il faut évidement citer les vecteurs propres dans le même ordre dans P que les valeurs propres associées dans D.

2) Attention, la matrice I_n ou même la matrice nulle se diagonalisent (elles sont déjà diagonales), alors même qu'elles ont des valeurs propres multiples.

3) Si nécessaire, on diagonalise les matrices réelles sur $\mathbb{C}$. D est à coefficients complexes, P et P^{-1} le sont aussi, mais finalement $P.D^n.P^{-1}$ est à coefficients réels.

4) Les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{pmatrix}$ sont appelées « matrices de Frobénius » ou « matrices compagnon ».

Elles se diagonalisent si et seulement si les valeurs propres sont distinctes.

On peut alors utiliser comme matrice de passage une matrice de VanDerMonde, du type $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 \end{pmatrix}$.

5) Les colonnes de la matrice de passage P sont définies à constante multiplicative près (non nulle). Sauf cas particulier de vecteurs propres tels que $\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on pourra imposer « première composante égale à 1 ».

Il n'y a pas unicité de la matrice P, mais dans la formule $M = P.D.P^{-1}$, les choix faits sur les colonnes de P se compensent.

6) Si M ne se diagonalise pas, on peut (sur $\mathbb{C}$) la trigonaliser (ou trianguler). On cherche D sous la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et on a $D^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n.\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

Attention, il n'y a aucun rapport entre « M diagonalisable ou non » et $\det(M)$. Le déterminant informe juste sur « M inversible ou non ». Au mieux, si vous avez $\det(M) = 0$, vous savez qu'il y aura un λ nul sur la diagonale de D.