0.1 Ce qu'il faut savoir sur les intégrales de Wallis.

0.1.1 Leur définition

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t).dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t).dt$$

Les deux définitions coïncident, par changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ qui transforme les sinus en cosinus et vice versa.

On pourra généraliser à des exposants non entiers. Mais les formules avec des factorielles perdront leur signification, et l'exposant devra demeurer strictement plus grand que -1. Le cas des exposants complexes ne fait l'objet d'aucun problème de concours.

0.1.2 Monotonie

La suite est décroissante ; en effet, pour n donné quelconque

$$W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t).(1-\sin(t)).dt$$

et tout est positif dans cette intégrale.

En tant que suite positive décroissante, elle converge, mais sa convergence vers 0 quand n tend vers l'infini n'est pas directement obtenue avec juste ces propriétés, sauf à utiliser un théorème de seconde année.

0.1.3 Intégration par parties

On relie W_{n+1} à W_{n-1} en intégrant par parties et en remplaçant $\cos^2(t)$ par $1-\sin^2(t)$

$$W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t).\sin(t).dt = \Big[-\cos(t).\sin^n(t)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n.\sin^{n-1}(t).\cos(t)).(-\cos(t)).dt$$

On a réparti

$\sin^n(t)$	$\hookrightarrow$	$n.\sin^{n-1}(t).\cos(t)$
$\sin(t)$	$\hookleftarrow$	$-\cos(t)$

$$W_{n+1} = n.\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(t).\cos^2(t).dt = n.\int_0^{\pi/2} (\sin^{n-1}(t) - \sin^{n+1}(t)).dt$$

La relation $W_{n+1} = n.(W_{n-1} - W_{n+1})$ donne alors

$$W_{n+1} = \frac{n}{n+1}.W_{n-1}$$

On va avancer de deux en deux. Et on constate la décroissance des deux sous-suites $W_{2.p}$ et $W_{2.p+1}$.

0.1.4 Lien avec les coefficients binomiaux

On calcule les deux premiers termes (voire plus avec $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2.t)}{2}$), puis les suivants avec la formule précédente.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$2.n-1$	$2.n$	$2.n+1$	$2.n+2$
	$\times\frac{1}{2}$		$\times\frac{3}{4}$		$\times\frac{5}{6}$		$\times\ldots$			$\times\frac{(2.n+1)}{(2.n+2)}$		
W_n	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}$		$\frac{1.3}{2.4}.\frac{\pi}{2}$		$\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\pi}{2}$			$\frac{1.3\ldots(2.n-1)}{2.4\ldots(2.n)}.\frac{\pi}{2}$		
		1		$\frac{2}{3}$		$\frac{2.4}{3.5}$		$\frac{2.4.6}{3.5.7}$	$\frac{2.4\ldots(2.n-2)}{3.5\ldots(2.n-1)}$		$\frac{2.4\ldots(2.n)}{3.5\ldots(2.n+1)}$	
			$\times\frac{2}{3}$		$\times\frac{4}{5}$		$\times\frac{6}{7}$			$\times\frac{(2.n)}{(2.n+1)}$		

On émet deux conjectures qu'on démontre par récurrence sur p :

$$W_{2.p} = \frac{1.3.5\ldots(2.p-1)}{2.4.6\ldots(2.p)}.\frac{\pi}{2} = \frac{impairs}{pairs}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.\prod_{k=1}^{p}\frac{2.k-1}{2.k}$$

$$W_{2.p+1} = \frac{2.4.6\ldots(2.p)}{3.5.7\ldots(2.p+1)} = \frac{pairs}{impairs} = \prod_{k=1}^{p} \frac{2.k}{2.k+1}$$

Mais il y a mieux ensuite, en sortant autant de facteurs 2 qu'il faut

$$\boxed{2 \quad \times 4 \quad \times 6 \quad \ldots \quad \times 2.p \quad = \quad \begin{matrix} 1 & \times 2 & \times 3 & \ldots & \times p \\ \times 2 & \times 2 & \times 2 & & \times 2 \end{matrix} \quad = \quad \frac{p!}{\times 2^p}}$$

ou en insérant les termes qui manquent pour créer des factorielles

$$\boxed{1 \quad \times 3 \quad \times 5 \quad \times 7 \quad \ldots \quad \times 2.p-1 \quad = \quad \begin{matrix} 1 & \times 2 & \times 3 & \times 4 & \times 5 & \times 6 & \times 7 & \times 8 & \ldots & \times 2.p-1 & \times 2.p \\ \times 2 & & \times 4 & & \times 6 & & \times 8 & & & & \times 2.p \end{matrix} \quad = \quad \frac{(2.p)!}{2^p.p!}}$$

$$W_{2.p} = \frac{(2.p)!}{2^{2.p+1}.(p!)^2}.\pi \text{ et } W_{2.p+1} = \frac{2^{2.p}.(p!)^2}{(2.p+1)!}$$

On peut aussi les proposer et valider par récurrence sur p.
Dans ces formules, on reconnaît

$$\frac{(2.n)!}{(n!)^2} = \frac{(2.n)!}{n!.n!} = \binom{2.n}{n}$$

et même $\frac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2} = \frac{1}{2^{2.n}}.\binom{2.n}{n}$ en lien avec la loi binomiale de paramètre $\frac{1}{2}$.

0.1.5 Une suite constante

La relation $W_{n+1} = \frac{n}{n+1}.W_{n-1}$ donne $(n+1).W_{n+1} = n.W_{n-1}$ puis

$$(n+1).W_{n+1}.W_n = n.W_n.W_{n-1}$$

La suite $(a_n) = (n.W_n.W_{n-1})$ est donc constante. Sa valeur pour n égal à 1 donne donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ n.W_n.W_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ et elle servira pour l'équivalent de W_n quand n tend vers l'infini.

On a aussi ce résultat avec les formules précédentes $W_{2.p} = \ldots$ et $W_{2.p+1} = \ldots$ par disjonction de cas. Mais c'est inutile et lourd.

0.1.6 Équivalent

On part de l'encadrement « décroissance » : $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$ qu'on multiplie par $n.W_n$ (positif)

$$n.W_{n+1}.W_n \leqslant n.(W_n)^2 \leqslant n.W_{n-1}.W_n$$

Avec la question précédente, on remplace $n.W_n.W_{n-1}$ par $\frac{\pi}{2}$ et $n.W_{n+1}.W_n$ par $\frac{n}{n+1}.(n+1).W_{n+1}.W_n$

$$\frac{n}{n+1}.\frac{\pi}{2} \leqslant n.(W_n)^2 \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Le théorème des gendarmes permet de dire que $n.(W_n)^2$ converge vers $\frac{\pi}{2}$. Par passage à la racine et division $\sqrt{\frac{2.n}{\pi}}.W_n$converge vers 1. On revient à la définition des équivalents :

$$W_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2.n}}$$

Ce résultat est valable aussi pour n réel tendant vers l'infini.

0.1.7 Inégalité supplémentaire

On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\Big(\int_a^b f(t).g(t).dt\Big)^2 \leqslant \int_a^b (f(t))^2.dt.\int_a^b (g(t))^2.dt$$

pour f et g continues de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$.

Il suffit d'étudier le signe du trinôme du second degré

$$X^2.\Big(\int_a^b (f(t))^2.dt\Big) - 2.X.\Big(\int_a^b f(t).g(t).dt\Big) + \Big(\int_a^b (g(t))^2.dt\Big)$$

qui est positif car c'est $\Big(\int_a^b (X.f(t) - g(t)\Big)^2.dt$. *On en déduit sue son discriminant est négatif ou nul, et c'est notre inégalité.*

Si on l'applique à des puissances du sinus, on obtient pour tout couple $(p,\ q)$

$$(W_{p+p})^2 \leqslant W_{2.p}.W_{2.q}$$

0.2 Ce que l'on sait aussi sur les intégrales de Wallis

0.2.1 Produit infini donnant π

On exploite à nouveau la décroissante on a pour tout n : $W_{2.n+2} \leqslant W_{2.n+1} \leqslant W_{2.n}$, puis après division et avec toujours la même relation de récurrence

$$\frac{2.n+1}{2.n+2} = \frac{W_{2.n+2}}{W_{2.n}} \leqslant \frac{W_{2.n+1}}{W_{2.n}} \leqslant 1$$

Par encadrement, $\dfrac{W_{2.n+1}}{W_{2.n}}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.
On revient aux formes multiplicatives :

$$\frac{\dfrac{2.4.6\ldots(2.n)}{3.5.7\ldots(2.n+1)}}{\dfrac{1.3.5\ldots(2.p-1)}{2.4.6\ldots(2.p)}.\dfrac{\pi}{2}} \longrightarrow_{n\to+\infty} 1$$

On isole la constante qui nous intéresse

$$\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2.k}{2.k+1}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2.k-1}{2.k}} = \frac{\dfrac{2.4.6\ldots(2.n)}{3.5.7\ldots(2.n+1)}}{\dfrac{1.3.5\ldots(2.p-1)}{2.4.6\ldots(2.p)}} \longrightarrow_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}$$

En regroupant les deux produits $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{4.k^2}{(4.k-1).(4.k+1)} \longrightarrow_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}$ et en l'écrivant abusivement avec le passage à une infinité de termes

$$\frac{4}{3}\times\frac{16}{15}\times\frac{36}{35}\times\frac{64}{63}\times\ldots\times\frac{4.k^2}{4.k^2-1}\times\ldots = \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3}\times\frac{4.4}{3.5}\times\frac{6.6}{5.7}\times\frac{8.8}{7.9}\times\ldots\times\frac{(2.k).(2.k)}{(2.k-1).(2.k+1)}\times\ldots$$

Cette formule a été proposée par John Wallis en 1656, *mais n'ayant aucune utilité pour calculer* π.
Il faut en effet mille cinq cent termes pour arriver à $3,141$ *à* 10^{-3} *près.*

0.2.2 Application à « factorielle de $\dfrac{1}{2}$ »

La suite factorielle de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifie trois propriétés

$$(0! = 1),\ (\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = (n+1)\times n!,\ (\forall (a,b,c) \in \mathbb{N}^3,\ a \leqslant b \leqslant c \Rightarrow \Big(\frac{b!}{a!}\Big)^{c-b} \leqslant \Big(\frac{c!}{b!}\Big)^{b-a})$$

Les deux premiers correspondant à la définition. La dernière [1] repose sur

$$\Big(\frac{b!}{a!}\Big)^{c-b} = \Big(\prod_{k=a+1}^{b} k\Big)^{c-b} \leqslant \Big(\prod_{k=a+1}^{b} b\Big)^{c-b} = (b^{b-a})^{c-b} = \Big(\prod_{k=b+1}^{c} b\Big)^{b-a} \leqslant \Big(\prod_{k=b+1}^{c} k\Big)^{b-a} \leqslant \Big(\frac{c!}{b!}\Big)^{b-a}$$

1. c'est la convexité logarithmique

On va alors chercher alors à généraliser avec une application de $[0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(f(0)=1),\ (\forall x\in\mathbb{R}^+,\ f(x+1)=(x+1)\times f(x),\ (\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ 0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\Rightarrow\Big(\frac{f(b)}{f(a)}\Big)^{c-b}\leqslant\Big(\frac{f(c)}{f(b)}\Big)^{b-a})$$

Si une telle application existe (et on pourrait prouver existence et unicité), alors elle coïncide avec la factorielle sur $\mathbb{N}$ et en donne une « belle » généralisation à $[0,\ +\infty[$ (et même $]-1,\ +\infty[$. On va travailler en admettant son existence et on va calculer alors $f\Big(\frac{1}{2}\Big)$.
Déjà, en mettant en boucle la formule $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ f(x+1)=(x+1)\times f(x)$, on trouve par récurrence sur n

$$f\Big(\frac{1}{2}+n\Big)=\frac{3\times5\times7\times\ldots\times(2.n+1)}{2^n}.f\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{(2.n+1)!}{2^{2.n}.n!}.f\Big(\frac{1}{2}\Big)$$

On écrit ensuite la dernière inégalité pour deux triplets $n\leqslant n+\frac{1}{2}\leqslant n+1$ puis $n-\frac{1}{2}\leqslant n\leqslant n+\frac{1}{2}$

$$\sqrt{\frac{f\Big(n+\frac{1}{2}\Big)}{n!}}\leqslant\sqrt{\frac{(n+1)!}{f\Big(n+\frac{1}{2}\Big)}}\ et\ \sqrt{\frac{n!}{f\Big(n-\frac{1}{2}\Big)}}\leqslant\sqrt{\frac{f\Big(n+\frac{1}{2}\Big)}{n!}}$$

On effectue des produits en croix

$$\frac{(2.n+1)!}{2^{2.n}.n!}.f\Big(\frac{1}{2}\Big)=f\Big(\frac{1}{2}+n\Big)\leqslant\sqrt{n!.(n+1)!}=n!.\sqrt{n+1}\ et\ n!\leqslant\sqrt{f\Big(n-\frac{1}{2}\Big).f\Big(n+\frac{1}{2}\Big)}=\frac{f\Big(n+\frac{1}{2}\Big)}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}$$

On isole et on retrouve une intégrale de Wallis

$$f\Big(\frac{1}{2}\Big)\leqslant\frac{2^{2.n}.(n!)^2}{(2.n+1)!}.\sqrt{n+1}=\frac{\sqrt{n+1}}{W_{2.n+1}}\ et\ \frac{2^{2.n}.(n!)^2}{(2.n+1)!}.\sqrt{n+\frac{1}{2}}\leqslant f\Big(\frac{1}{2}\Big)$$

On passe à la limite en rappelant l'équivalent trouvé : $\dfrac{W_{2.n+1}}{\sqrt{2.n+1}}$ tend vers $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$; on trouve une double inégalité

$$f\Big(\frac{1}{2}\Big)\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ et\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\leqslant f\Big(\frac{1}{2}\Big)$$

qui se solde par une valeur exacte.

> *Vous pouvez d'ailleurs la demander à votre calculatrice. Suivant le modèle, elle donne la bonne réponse, une réponse approchée ou pas de réponse du tout.*

L'exercice peut se prolonger en notant que la formule $n!=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^n.e^{-t}.dt$ est valable pour n entier (calculer pour $n=0$ et intégrer ensuite par parties) et donne une fonction logarithmiquement convexe (utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz). On peut donc généraliser à l'exposant $\frac{1}{2}$ avec une notation abusive

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\Big(\frac{1}{2}\Big)!=\int_0^{+\infty}\sqrt{t}.e^{-t}.dt$$

Le changement de variable $u=\sqrt{t}$ conduit alors à l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-u^2}.du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (après une intégration par parties).

> *On en profite pour rappeler qu'on ne dispose pas de primitive de $u\longmapsto e^{-u^2}$ à l'aide des fonctions usuelles. C'est seulement quand on la calcule de 0 à l'infini que le résultat devient simple.*

0.2.3 Application à la somme $\zeta(2)$

Le réel $\zeta(2)$ est la somme (infinie) de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$. En langage plus direct :

$$\zeta(2) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

Cette somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$, ce qui peut se prouver de multiples façons. Le calcul de cette valeur est appelé « problème de Bâle » et a été résolu par Leonhard Euler en 1735.

La convergence est assurée par croissance de $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ *et majoration par* $\left(1+\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)_{N\in\mathbb{N}}$. *Ou par comparaison série intégrale.*

On définit $J_n = \int_0^{\pi/2} t^2.\cos^{2.n}(t).dt$ *et* $K_n = \frac{J_n}{W_{2.n}}$.

En fusionnant en une intégrale et en remplaçant $1-\cos^2(t)$ par $\sin^2(t)$ on obtient

$$J_{n-1} - J_n = \int_0^{\pi/2} t^2.\cos^{2.n-2}(t).\sin^2(t).dt$$

En intégrant par parties $W_{2.n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2.n}(t).dt$ avec

$\cos^{2n}(t)$	$\hookrightarrow$	$-2.n.\cos^{2.n-1}(t).\sin(t)$
1	$\hookleftarrow$	t

on trouve

$$W_{2.n} = 2.n.\int_0^{\pi/2} t.\cos^{2.n-1}(t).\sin(t).dt$$

En intégrant encore par parties, on trouve

$$J_{n-1} - J_n = \frac{1}{2.n-1}.\left(\frac{W_{2.n}}{n} + J_n\right)$$

En divisant par $W_{2.n}$, on obtient

$$\frac{J_{n-1}}{W_{2.n}} - K_n = \text{`}\frac{1}{2.n-1}.\left(\frac{1}{n} + K_n\right)$$

puis

$$K_{n-1} - K_n = \frac{1}{2.n^2}$$

On somme alors ces $K_{n-1} - K_n$ pour n de 1 à N (somme télescopique) et on calcule K_0 :

$$\frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = K_0 - K_N = \frac{\pi^2}{12} - K_N$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre K_N vers 0 quand n tend vers l'infini.
Pour cela, on montre par variation de fonction différence $\forall t \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right],\ t \leqslant \frac{\pi}{2}.\sin(t)$.
Ceci permet d'obtenir ensuite $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{8.(n+1)}.I_n$ et enfin $0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^2}{8.(n+1)}$.

0.2.4 Application à la formule de Stirling

Les intégrales de Wallis vont juste servir à la fin de cet exercice à déterminer la constante $\sqrt{2.\pi}$ dans le célèbre équivalent

$$n! \sim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n.\sqrt{2.n.\pi}$$

On définit les suites a et b par

$$a_n = \ln\left(\frac{(n/e)^n.\sqrt{n}}{n!}\right) \text{ et } b_n = a_n + \frac{1}{12.(n-1)}$$

pour tout n. On montre qu'elles forment un couple de suites adjacentes :

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2$$

et $b_n - a_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.
Par théorème [2], elles convergent vers une limite commune, qu'on va noter λ.
Mais alors $2.a_n - a_{2.n}$ va aussi converger vers $2.\lambda - \lambda$ c'est à dire vers λ.
Or, le calcul de $2.a_n - a_{2.n}$ donne $\ln\left(\sqrt{\frac{n}{2}}.\frac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}\right)$ c'est à dire $\ln\left(\sqrt{\frac{n}{2}}.\frac{2}{\pi}.W_{2.n}\right)$
L'équivalent de l'intégrale de Wallis $W_{2.n}.\sqrt{\frac{2.(2.n)}{\pi}} \longrightarrow_{n\to+\infty} 1$ donne donc $2.a_n - a_{2.n} \longrightarrow_{n\to+\infty} \ln(\frac{1}{\sqrt{2.\pi}})$.
On a la valeur de λ. On peut reporter : $\ln\left(\frac{(n/e)^n.\sqrt{n}}{n!}\right) \longrightarrow_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}\right)$ puis passer à l'exponentielle (continue) et renverser $\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n.\sqrt{2.n.\pi}} \longrightarrow_{n\to+\infty} 1$ et c'est la définition de l'équivalent dit de Stirling.

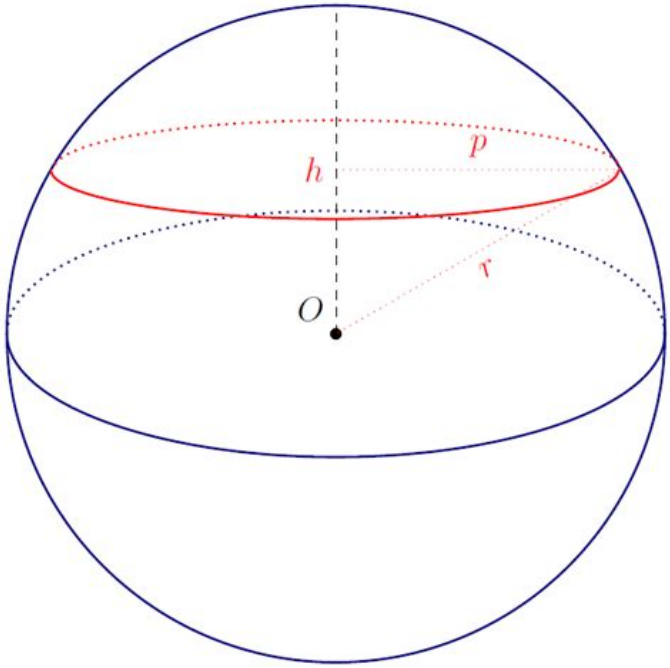
> *Initialement la formule* $n! \sim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n.\sqrt{n}.\lambda$ *a été obtenue par Abraham de Moivre (avec une constante* λ *à déterminer) en* 1730 *soit* 24 *ans avant sa mort* [3]*. C'est Stirling qui avec les travaux de Wallis réussit à établir* $C = 2.\pi$.

0.2.5 Volume de la sphère de l'espace de dimension n

Dans $\mathbb{R}^n$ (là où les points ont n coordonnées $(x_1, \ldots x_n)$) on peut définir la sphère centrée sur l'origine et de rayon R : ensemble des points vérifiant $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x_n)^2} \leqslant R$.
Et on peut en calculer le « volume » (le « cube » unité $[0,\ 1]^n$a pour volume 1, le cube $[0,\ R]^n$ a pour volume R^n par homogénéité).

La forme de la sphère dépend de la dimension n de l'espace

dimension	0	1	2	3	4
forme	point	segment $[-R,\ R]$	disque de rayon R	sphère de rayon R	truc de rayon R
« volume »	1	$2.R$	$\pi.R^2$	$4.\pi.R^3/3$	à voir



Comment obtient on le « célèbre » $\frac{4}{3}.\pi.R^3$?
On fait des coupes à z constant. On obtient à chaque fois un disque de rayon $\sqrt{R^2 - z^2}$ (cf. dessin et théorème de Pythagore).
Chaque disque a pour aire $\pi.(R^2 - z^2)$. La coupe a pour volume élémentaire $\pi.(R^2 - z^2).dz$ et on somme (on intègre) de $z = -R$ à$z = R$.

$$V_3(R) = \int_{-R}^{R} \pi.(R^2 - z^2).dz = \pi.\left[R^2.z - \frac{z^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \pi.\frac{4.R^3}{3}$$

On va reprendre la même idée pour calculer le volume de la boule en dimension $n+1$ de rayon R.

La dernière composante x_{n+1} peut varier de $-R$ à R. Et la coupe à x_{n+1} fixé a pour équation $(x_1)^2 + \ldots + (x_n)^2 = R^2 - (x_{n+1})^2$. C'est une boule de dimension n et de rayon $\sqrt{R^2 - (x_{n+1})^2}$.

2. en fait, simplement, (a_n) est croissante, majorée par b_1 donc elle converge vers son plus petit majorant
3. *de Moivre est connu pour avoir prédit le jour de sa mort : il compta qu'il dormait quinze minutes de plus chaque nuit. Sommant cette progression arithmétique, il en déduisit qu'il mourrait lorsque ses nuits feraient vingt-quatre heures. Ce qui se produisit bel et bien.*

Le volume de la boule de dimension $n+1$ est donc

$$V_{n+1}(R) = \int_{x=-R}^{R} V_n(\sqrt{R^2-x^2}).dx = \int_{x=-R}^{R} (\sqrt{R^2-x^2})^n.V_n(1).dx$$

A la deuxième étape, on a sorti $(\sqrt{R^2-x^2})^n$ par homogénéité.
On a donc en particulier

$$V_{n+1}(1) = V_n(1).\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n/2}.dx$$

Par parité l'intégrale $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n/2}.dx$ vaut 2. $\int_{0}^{1}(1-x^2)^{n/2}.dx$. On change ensuite de variable avec $x = \sin(\theta)$.
L'intégrale devient 2. $\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2(\theta))^{n/2}.\cos(\theta).d\theta$ et on reconnaît $2.W_{n+1}$ après avoir remplace $\sqrt{1-\sin^2}$ par cos (sur notre intervalle).

On a donc la relation de récurrence

$$V_{n+1}(R) = 2.W_{n+1}.V_n(R)$$

Cette relation permet de calculer les volumes $V_n(1)$ de proche en proche, puis les volumes $V_n(R)$ par homogénéité

$n = 2.p$	$n = 2.p+1$
$V_{2.p}(R) = \frac{\pi^p.R^{2.p}}{p!}$	$V_{2.p+1}(R) = 2^{p+1}.\frac{\pi^p.R^{2.p+1}}{1.3.5\ldots(2.p+1)}$

On notera que ces « volumes » tendent vers 0 quand la dimension n tend vers l'infini.

> Ce n'est pas si surprenant, alors que le volume du cube unité reste égal à 1.
> On notera quand même que la grande diagonale du cube unité vaut $\sqrt{n}$ et tend vers l'infini.

0.2.6 Factorisation d'Euler du sinus

$$F_N(x) = x.\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$$

F(1/2)=1/pi