Polynômes d'interpolation de Lagrange

1 Problème : trouver les polynômes de degré inférieur ou égal à n passant par n+1 points

n est un entier naturel fixé fixé, on se donne $n+1$ abscisses distinctes (de a_0 à a_n) et $n+1$ ordonnées arbitraires (de b_0 à b_n), on cherche le / les polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall i \leqslant n,\ P(a_i) = b_i$.

La question peut être aussi posée dans $\mathbb{C}$ même si graphiquement c'est moins visuel, ou dans tout corps commutatif.

2 Théorème de rigidité

Deux polynômes de degré inférieur ou égal à n qui coïncident en $n+1$ points sont nécessairement égaux.
On suppose que les deux polynômes P_1 et P_2 vérifient $\forall i \leqslant n,\ P_1(a_i) = P_2(a_i)$.
On considère alors le polynômes $P_1 - P_2$.
Il admet $n+1$ racines distinctes.
Il se factorise donc par chacun des termes $(X - a_i)$.
Il se factorise donc par $\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)$ et s'écrit $Q(X).\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)$.
Mais si $Q(X)$ n'est pas le polynôme nul, alors la différence $P_1 - P_2$ est de degré $\deg(Q) + n + 1$ ce qui est contradictoire.
On a donc $Q(X) = 0$ et en repassant de l'autre côté $P_1 = P_2$.

Ceci nous garantit que si notre problème admet une solution, alors il n'en a qu'une.

3 Approche calculatoire

On pose a priori le polynôme sous la forme $c_0 + c_1.X + \ldots + c_n.X^n$ (proprement $\sum_{k=0}^{n} c_k.X^k$) et on écrit le système (linéaire) de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues

$$\left\{\begin{array}{cccccccc|} c_0 & +c_1.a_0 & +c_2.(a_0)^2 & +\ldots & +c_n.(a_0)^n & = & b_0 \\ c_0 & +c_1.a_1 & +c_2.(a_1)^2 & +\ldots & +c_n.(a_1)^n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_0 & +c_1.a_n & +c_1.(a_n)^2 & +\ldots & +c_n.(a_n)^n & = & b_0 \end{array}\right.$$

On résout le système par équivalences et on trouve une unique solution $(c_0, \ldots c_n)$ (exploitable pour $n = 1$ et $n = 2$, déjà plus lourde pour $n = 3$)..

3.1 On écrit le système sous forme matricielle

Chaque relation du type $c_0 + c_1 a_i + c_2.(a_i)^2 + \ldots + c_n.(a_n)^2$ donne finalement le système

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & (a_0)^2 & \ldots & (a_0)^n \\ 1 & a_1 & (a_1)^2 & \ldots & (a_1)^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & (a_n)^2 & \ldots & (a_n)^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On constate que la matrice est une matrice de VanDerMonde, et le cours nous dit que son déterminant est $\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)$.
Il est non nul, la théorie des systèmes de Cramer nous donne une unique solution calculable par les formules de Cramer

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & (a_0)^2 & \dots & (a_0)^n \\ 1 & a_1 & (a_1)^2 & \dots & (a_1)^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & (a_n)^2 & \dots & (a_n)^n \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$c_0 = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_0 & (a_0)^2 & \dots & (a_0)^n \\ b_1 & a_1 & (a_1)^2 & \dots & (a_1)^n \\ \vdots & & & & \\ b_n & a_n & (a_n)^2 & \dots & (a_n)^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_0 & (a_0)^2 & \dots & (a_0)^n \\ 1 & a_1 & (a_1)^2 & \dots & (a_1)^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & (a_n)^2 & \dots & (a_n)^n \end{vmatrix}},\ c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b_0 & (a_0)^2 & \dots & (a_0)^n \\ 1 & b_1 & (a_1)^2 & \dots & (a_1)^n \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & b_n & (a_n)^2 & \dots & (a_n)^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_0 & (a_0)^2 & \dots & (a_0)^n \\ 1 & a_1 & (a_1)^2 & \dots & (a_1)^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & (a_n)^2 & \dots & (a_n)^n \end{vmatrix}}, \dots c_n = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_0 & (a_0)^2 & \dots & b_0 \\ 1 & a_1 & (a_1)^2 & \dots & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & (a_n)^2 & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_0 & (a_0)^2 & \dots & (a_0)^n \\ 1 & a_1 & (a_1)^2 & \dots & (a_1)^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & (a_n)^2 & \dots & (a_n)^n \end{vmatrix}}$$

Mais ces formules sont lourdes.

4 Méthode constructive

On commence par traiter des problèmes plus simples pour la colonne des paramètres b_j : un et un seul des b_j est non nul.

Problème simplifié : k fixé, on cherche un polynôme (le polynôme) vérifiant $P(a_i) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & i \neq k \\ 1 & si & i = k \end{array} \right|$.

On connaît n racines pour le polynôme, c'est un multiple de $\prod_{i\neq j}(X - a_k)$ et aucun autre facteur car son degré est inférieur ou égal à n).

La valeur de ce polynôme en a_j est $\prod_{i\neq k}(a_k - a_i)$ (réel non nul), on peut donc ajuster et proposer

Remarque : la forme rigoureuse est plus agréable que la forme « points de suspension »

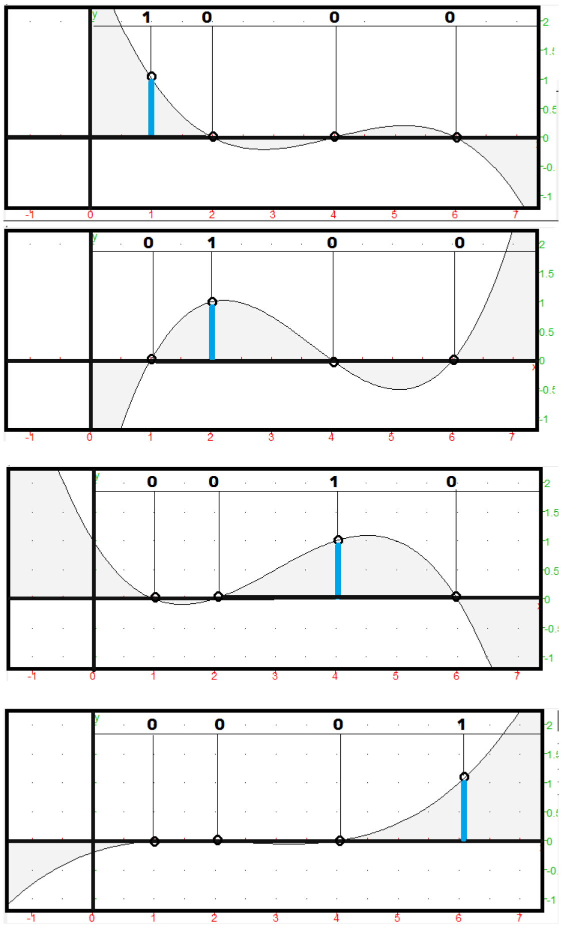
$$L_k(X) = \prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ i\neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i} = \frac{(X - a_0))}{(a_k - a_0)} \cdot \frac{(X - a_1)}{(a_k - a_1)} \cdots \frac{(X - a_{k-1})}{(a_k - a_{j-1})} \cdot \frac{(X - a_{k+1})}{(a_k - a_{j+1})} \cdots \frac{(X - a_n)}{(a_k - a_n)}$$

Maintenant qu'on dispose de polynômes répondant à des problèmes simples, il suffit de les combiner :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k . L_k(X)$$

5 Approche linéaire

On considère deux espaces vectoriels : $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$ et $(\mathbb{R}^{n+1}, +, .)$. Ils sont tous deux de dimension $n + 1$ (attention, $\dim(\mathbb{R}_n[X] = n + 1$ car on dispose d'une base $(1, X, X^2, \dots X^{n+1})$ faite de $n + 1$ vecteurs ; quant à $\mathbb{R}^{n+1}$ on peut le doter de sa base « canonique » $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$).



On construit l'application $\phi \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P(X) & \mapsto & \begin{pmatrix} P(a_0) \\ P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} \end{array}$

Cette application est linéaire :

$$\forall (P,Q),\ \forall(\lambda,\mu),\ \phi(\lambda.P+\mu.Q)=\lambda.\phi(P)+\mu.\phi(Q)$$

Elle est injective (le théorème de rigidité permet de passer de $\phi(P_1) = \phi(P_2)$ à $P_1 = P_2$ et on peut aussi raisonner sur le noyau).
La formule du rang nous dit alors que son image est de dimension $n+1$. Il est donc égale à $\mathbb{R}^{n+1},+,.)$ tout entier.

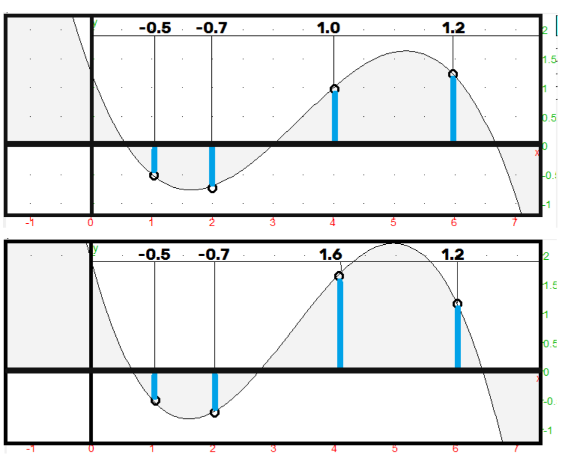
Et ϕ devient alors bijective de $(\mathbb{R}_n[X],+,.)$ dans $(\mathbb{R}^{n+1},+,.)$.

Il nous suffit alors de calculer $\phi^{-1}(\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix})$.

Mais par linéarité, c'est

$$b_0.\phi^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) + b_0.\phi^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) + \ldots + b_n.\phi^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})$$

On a donc juste besoin de calculer les images réciproques des vecteurs de la base canonique.



Or, il suffit à chaque fois de trouver un polynôme vérifiant $\begin{pmatrix} P(a_0) \\ \vdots \\ P(a_{k-1}) \\ P(a_k) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Une fois encore, il s'agit de $\prod\limits_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ k\neq k}} \dfrac{X-a_i}{a_k-a_i}$. Le polynôme cherché est bien $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k.\Big(\prod\limits_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ k\neq k}} \dfrac{X-a_i}{a_k-a_i}\Big)$

6 Exemples

6.1 Exemple pour $n = 1$

On cherche l'équation de la droite passant par $(a,\ \alpha)$ et $(b,\ \beta)$. On introduit les deux polynômes $\dfrac{X-b}{a-b}$ et $\dfrac{X-a}{b-a}$. Il ne reste plus qu'à les combiner $\alpha.\dfrac{X-b}{a-b} + \beta.\dfrac{X-a}{b-a}$

Elle coïncide avec l'approche classique $\frac{\beta-\alpha}{b-a}.(X-a)+\alpha$ qu'on utilise pour les équations de tangente : $f'(a).(x-a)+f(a)$.

6.2 Exemple pour $n=2$

On veut cette fois une parabole (ou droite) passant par $(a,\ \alpha)$, $(b,\ \beta)$ et $(c,\ \gamma)$.

C'est tout naturellement

$P(X)$	$\frac{(X-b).(X-c)}{(a-b).(a-c)}.\alpha$	$+\frac{(X-a).(X-c)}{(b-a).(b-c)}.\beta$	$\frac{(X-a).(X-a)}{(c-b).(c-a)}.\gamma$
en a	α	$+0$	$+0$
en b	0	$+\beta$	$+0$
en c	0	$+0$	$+\gamma$

6.3 Application aux « trois niveaux »

la polynôme qui coïncide avec une fonction f en trois points a, $\frac{a+b}{2}$ et b est

et son intégrale de a à b vaut (tous calculs faits) $(b-a).\frac{f(a)+4.f(b)}{6}$
C'est un résultat qui sert dans l'approximation d'une intégrale par des rectangles, trapèzes et arcs de parabole.

7 Généralisation

7.1 Solutions sans limitation de degré

Si on n'impose plus le degré du polynôme, par principe « solutions homogènes plus solution particulière », il y a plusieurs solutions

$$Q(X).\prod_{k=0}^{n}(X-a_k)+\sum_{j=0}^{n}b_j.\prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}}\frac{X-a_i}{a_j-a_i}$$

avec $Q(X)$ décrivant $\mathbb{R}[X]$.

L'algébriste reconnaît dans $\left\{Q(X).\prod_{k=0}^{n}(X-a_k)\mid Q\in\mathbb{R}[X]\right\}$ le noyau de l'application ϕ.

7.2 Cas des racines doubles

On cherche par exemple à faire passer la courbe d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 par $(a,\ \alpha)$, $(b,\ \beta)$ et $(c,\ \gamma)$ et on impose le coefficient directeur de la tangente en a (celle qu'on va qualifier ici de racine double). Dans l'approche algébrique, on remplace ϕ par $P(X)\mapsto\begin{pmatrix}P(a)\\P'(a)\\P(b)\\P(c)\end{pmatrix}$ et on cherche les antécédents des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On va être amené à considérer des multiples de

$(X-b).(X-c).(X-d)$	$(X-a).(X-b).(X-c)$	$(X-a)^2.(X-c)$	$(X-a)^2.(X-b)$

avec d à ajuster.