LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 5 février
M.P.S.I.2

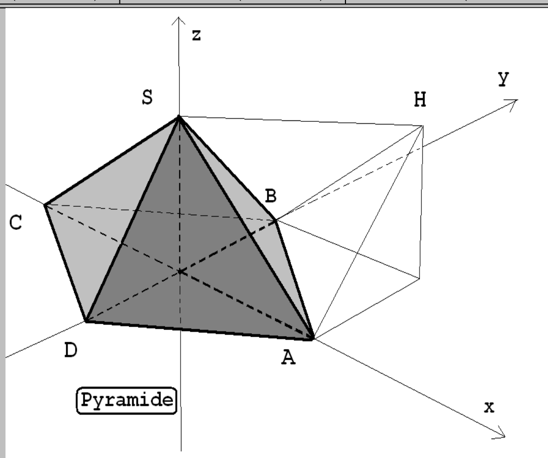
2023 2024

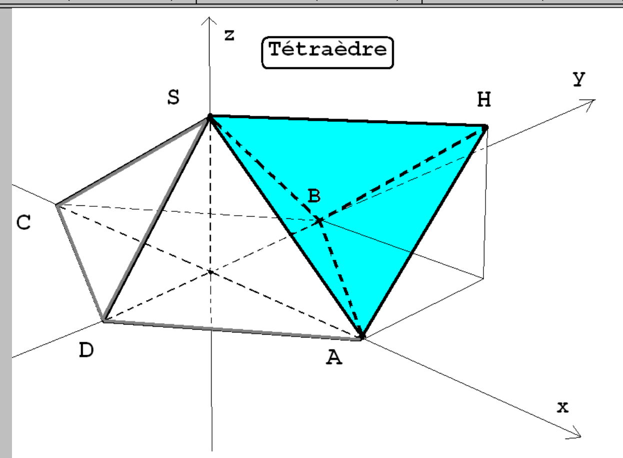
TD18

◦0◦

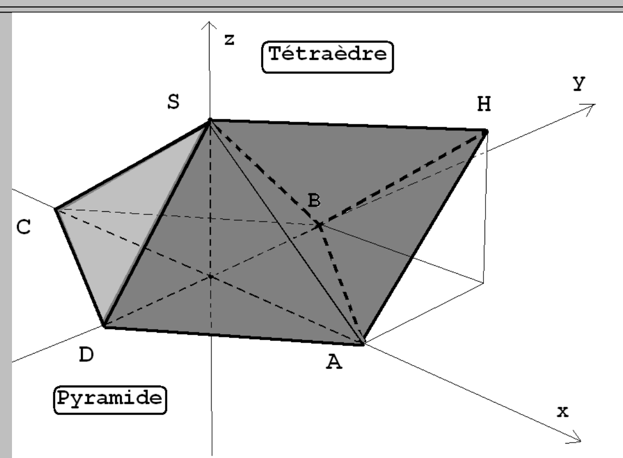
♡♣ **La pyramide et le tétraèdre.** On définit :

A	B	C	D	S	H
$(1,\ 0,\ 0)$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 0)$	$(0,\ -1,\ 0)$	$(0,\ 0,\ 1)$	$(1,\ 1,\ 1)$





Montrez que $(A,\ B,\ C,\ D,\ S)$ est une pyramide à base carrée et à faces équilatérales *(nombre de faces ?)*.
.
Montrez que $(A,\ B,\ S,\ H)$ est un tétraèdre régulier "posé sur une face de la pyramide" *(nombre de faces ?)*.
.
Montrez que A, D, S et H sont coplanaires.
Combien de faces a le solide formé de tous nos points ?
.



Base carrée :
on doit vérifier que les quatre longueurs sont égales : $AB = BC = CD = DA = \sqrt{2}$ puisque

$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ par exemple

que les côtés sont deux à deux orthogonaux : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$(-1).(-1) + 1.(-1) + 0.0 = 0$

On peut aussi prouver que les diagonales ont la même longueur, ce qui prouvera que ce losange est un carré.
Par sécurité, on montrer que ces points sont coplanaires : plan d'équation $z = 0$.

Pyramide à faces équilatérales :

chaque face a trois côtés égaux : $AB = AS = BS = \sqrt{2}$ puisque $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par exemple.

La pyramide a cinq sommets $S = 5$, cinq faces (dont quatre triangulaires) $F = 5$ et huit arêtes $A = 8$.
On valide la formule d'Euler (encore lui !) : $S - A + F = 2$.

La face ABS est déjà un triangle équilatéral, on le sait.

Reste à prouver alors $AH = BH = SH = \sqrt{2}$ avec par exemple $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La tétraèdre a quatre sommets $S = 4$, quatre faces (dont trois triangulaires) $F = 4$ et six arêtes $A = 6$.
On valide la formule d'Euler : $S - A + F = 2$.

A priori, le nouvel objet a

sommets	faces	arêtes
$5+4$	$5+4$	$8+6$

Mais trois sommets sont mis en commun

sommets	faces	arêtes
A, B, C, D, S, H		
6	9 ?	14 ?

Et une face disparaît dans l'objet, deux fois :

sommets	faces	arêtes
A, B, C, D, S, H	AHS CDS BHS ADS ABH BCS $ABCD$	
6	7 ?	14

Et trois arêtes ont été fusionnées :

sommets	faces	arêtes
A, B, C, D, S, H	AHS CDS BHS ADS ABH BCS $ABCD$	AB AS SH BC BS AH CD CS AB DA DS
6	7 ?	11 ?
$S - A + F = 2$		

Mais il y a une surprise : A, D, S et H sont coplanaires.
On calcule le volume du parallélépipède, ou on vérifie que les trois vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{AH}$ forment une famille liée.

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$= 0$
$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AD}$				

On peut aussi deviner l'équation d'un plan contenant les quatre points : $x - y + z = 1$.

On vérifie :

A	H	S	D
$1-0+0=1$	$1-1+1=1$	$0-0+1=1$	$1-(-1)+1=1$

Comment avoir trouvé cette équation : $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y-0 & -1 & 0 \\ z-0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (c'est $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}) = 0$.

On peut avoir trouvé un vecteur normal : $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où une équation en $-x + y - z = C^{te}$.

On peut aussi poser a priori $a.x + b.y + c.z + d = 0$ (équation d'un plan),

dire qu'il passe par A, par D, par S et par H $\left\{ \begin{array}{ccccccc} a & & & +d & = & 0 \\ & -b & & +d & = & 0 \\ & & c & +d & = & 0 \\ a & +b & +c & +d & = & 0 \end{array} \right|$

et voir que le système est par chance dégénéré $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$,

ce qui assure l'existence d'au moins une solution non nulle, donc un vrai plan.

Ah le plaisir de l'algèbre linéaire, trouver quatre chemins au moins qui mènent à la réponse, avec plus ou moins de beauté (ici tous beaux et efficaces).
C'est aussi quand même ce qui déroute les élèves trop gentillets qui veulent des fiches « face à ça, je fais ***systématiquement*** *ça ».*
Toute la différence entre maths de Sup (approches variées) et maths de terminale (un chemin à apprendre par cœur).

∘0∘ ♡ Le colleur demande de calculer le déterminant $\begin{vmatrix} \cos(2.a) & \cos(a+b) & \cos(a+c) & \cos(a+d) \\ \cos(a+b) & \cos(2.b) & \cos(b+c) & \cos(b+d) \\ \cos(c+a) & \cos(c+b) & \cos(2.c) & \cos(c+d) \\ \cos(d+a) & \cos(d+b) & \cos(d+c) & \cos(2.d) \end{vmatrix}$. Après un calcul un peu long, l'élève P.Céhessi trouve 0.
L'élève M.Péhaiçi bougonne "coplanaires dans $\mathbb{R}^4$". Expliquez.

On peut développer les cosinus. Le déterminant vaut

$$\begin{vmatrix} \cos(a).\cos(a)-\sin(a).\sin(a) & \cos(a+b) & \cos(a+c) & \cos(a+d) \\ \cos(a).\cos(b)-\sin(a).\sin(b) & \cos(2.b) & \cos(b+c) & \cos(b+d) \\ \cos(a).\cos(c)-\sin(a).\sin(c) & \cos(c+b) & \cos(2.c) & \cos(c+d) \\ \cos(a).\cos(d)-\sin(a).\sin(d) & \cos(d+b) & \cos(d+c) & \cos(2.d) \end{vmatrix}$$

et ainsi de suite.

On décide de nommer deux colonnes : $C = \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \cos(b) \\ \cos(c) \\ \cos(d) \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} \sin(a) \\ \sin(b) \\ \sin(c) \\ \sin(d) \end{pmatrix}$.

La colonne $\begin{pmatrix} \cos(a).\cos(a)-\sin(a).\sin(a) \\ \cos(a).\cos(b)-\sin(a).\sin(b) \\ \cos(a).\cos(c)-\sin(a).\sin(c) \\ \cos(a).\cos(d)-\sin(a).\sin(d) \end{pmatrix}$ est donc $\cos(a).\begin{pmatrix} \cos(a) \\ \cos(b) \\ \cos(c) \\ \cos(d) \end{pmatrix} - \sin(a).\begin{pmatrix} \sin(a) \\ \sin(b) \\ \sin(c) \\ \sin(d) \end{pmatrix}$.
La seconde colonne est $\cos(b).C - \sin(b).S$.
La troisième ? $\cos(c).C - \sin(c).S$.
Et la dernière ? Non. Vous avez compris.

Les quatre colonnes sont des combinaisons de C et S.
Elles sont donc coplanaires dans le plan engendré par ces deux vecteurs [1].
Le déterminant est donc nul.

Un exercice qui teste votre capacité à dire « je ne calcule pas tout de suite, je réfléchis d'abord, je change de point de vue.
« Est ce une matrice d'un système, ou un simple tableau de nombres ou une famille de vecteurs, ou une transformation... ».
Zéro « par coeur », tout « par cerveau ».

∘1∘ Une forme bilinéaire antisymétrique sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$ vérifie $\phi(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}) = 4$ et $\phi(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{k}) = 10$.
Pouvez vous calculer $\phi(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}-\overrightarrow{k})$?
Et si je vous donne $\phi(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}) = 8$?

Le cours ne parle que des tri-linéaires antisymétriques sur $\mathbb{R}^3$. Ici, elles ne sont que bilinéaires, et « donc » plus nombreuses.
Partons de $\phi(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}) = 4$ et développons par bilinéarité :

$$\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) - \phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) + \phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) - \phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}) = 4$$

Profitons de l'aternance : $0 - \phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) + \phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) - 0 = 4$
puis de l'antisymétrie : $-2.\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = 4$.
La formule $\phi(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}) = 4$ nous a donné $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = -2$ [2]

De même, $\phi(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{k}) = 10$ donne

$$\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) + 2.\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) + \phi(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}) + 4.\phi(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}) = 10$$
$$2.\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) - \phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) = 10$$

On résume ce qu'on connaît :

	$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{i}$	0	-2	10
$\overrightarrow{j}$	2	0	?
$\overrightarrow{k}$	-10	?	0

1. colinéaires si même C et S sont proportionnels
2. et $\phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) = 2$ c'est vrai

Et maintenant $\phi(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}) = \phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}) - \phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{k}) + \phi(\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{j}) - \phi(\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k})$
$\phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j} - \phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{k}) - \phi(\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k})$
Il nous manque un terme. On ne peut pas conclure.

L'information $\phi(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}) = 8$ donne

$$\phi(\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}) + \phi(\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}) - \phi(\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{j}) = 8$$

et on peut conclure. Le reste n'est que gentil calcul.

∘2∘ On va étudier les matrices antisymétriques (${}^tA = -A$) et aller en direction du résultat : le déterminant d'une matrice réelle antisymétrique est le carré d'une formule en les coefficients de la matrice (le Pfaffien). Les questions sont largement issues d'une épreuve de Polytechnique-ESPCI, filière P.C. de 2003 (quel âge aviez vous ?)[a]

a. n'allez pas aux toilettes avec votre smartphone pour essayer de récupérer le corrigé, j'ai modifié l'intitulé et le déroulement des questions à ma façon, et viré les parties difficiles.

Moi je dirais un mois ou deux, non ?

I∼0) On se fixe un entier n qui pourra le temps de quelques questions prendre une valeur imposée. On note E_i le i^{eme} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ *(n composantes nulles sauf la i^{eme} qui vaut 1)*. On note A_n l'espace des matrices antisymétriques de taille n sur n *(rappel : ${}^tA = -A$)*. Montrez que c'est un espace vectoriel pour les lois usuelles, donnez sa dimension et donnez une base à l'aide des $E_i.{}^tE_j$ *(on ne demandera pas de prouver que c'est une base)*[a].

a. essayez en taille 2 : $E_1.{}^t(E_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_1.{}^t(E_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tandis que $E_2.{}^t(E_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On montre que l'ensemble des matrices antisymétriques est un sous-espace vectoriel de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$.
La matrice nulle est antisymétrique.
Si A et B sont antisymétriques, alors on a

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = -A - B = -(A+B)$$

On prend cette fois A antisymétrique et α réel. On a alors

$${}^t(\alpha.A) = \alpha.{}^tA = \alpha.(-A) = -(\alpha.A)$$

Une base est formée des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, différences de matrices du type $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or, chacune de ces matrices est de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ce sont donc des $E_i.({}^tE_k)$.
Et la base cherchée est formée des $E_i.({}^tE_k) - E_i.({}^tE_k)$.
Il y a une condition : $i \neq k$ (sinon, on a la matrice nulle.
Il y a aussi la condition $i < j$ pour ne pas prendre une matrice puis quelques temps plus tard son opposée.
On garde donc $\boxed{E_i.({}^tE_k) - E_i.({}^tE_k) \text{ avec } 1 \leqslant i < k \leqslant n}$

La condition $1 \leqslant i < k \leqslant n$ donne un ensemble de cardinal $\sum_{k=1}^{n}(k-1)$.

On trouve $\boxed{\dim(A_n) = \dfrac{n.(n-1)}{2}}$

I∼1) Montrez que le déterminant d'une matrice antisymétrique de taille impaire est forcément nul.

Prenons une matrice A antisymétrique de taille $2.p+1$. On a alors ${}^tA = -A$. On passe au déterminant : $\det({}^tA) = \det(-A)$. Or, une matrice et sa transposée ont le même déterminant, et le déterminant est une forme multilinéaire en ses vecteurs : $\det(A) = (-1)^{2.p+1}.\det(A)$. La seule solution est $\det(A) = 0$.
On est débarrassé des matrices antisymétriques de taille 3, 5 et autres. Leur déterminant est un carré, celui de 0.

Rapport du jury : un grand classique qui se démontre en une ligne ! Mais curieusement, cette question n'a pas été réussie par plus de la moitié des candidats, dont beaucoup d'entre eux ont cherché à faire une récurrence improbable. Elle fait donc partie des quelques questions qui ont permis de faire la différence ; d'autres seront indiquées aussi dans le rapport.

I∼2) L'élève A dit que le produit de deux matrices antisymétriques est symétrique, et B dit que le produit de deux matrices antisymétriques est antisymétrique. Mettez les d'accord. *Cette question n'était pas dans le sujet de Polytechnique.*

On peut prendre A et B antisymétriques : ${}^tA = -A$ et ${}^tB = -B$. On a alors ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA = -B.(-A) = B.A$.
Mais ça ne fait pas $A.B$.
Faute de conclusion, on se dit qu'on va construire un contre-exemple, en prenant deux matrices antisymétriques, de taille 3, car en taille 2 tout va trop bien.
On tente au hasard :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le produit n'est ni symétrique, ni antisymétrique.

Ah oui, pour une question négative, on attend une réponse par contre-exemple, avec le mot souligné.

Si le hasard n'avait rien donné, on aurait dû prendre la forme générale :

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a.\alpha - b.\beta & & \\ & & -a.\beta \\ & -\alpha.b & \end{pmatrix}$$

Mais il est bien plus rigoureux de donner des vraies valeurs que de se contenter d'une forme générale.

I∼3) Est il vrai que les matrices antisymétriques de taille 2 forment un supplémentaire[a] de l'ensemble des matrices de trace nulle ? Pouvez vous donner dans $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ un sous-espace vectoriel qui soit à la fois supplémentaire de l'ensemble des matrices symétriques, mais aussi de l'ensemble des matrices de trace nulle ?

a. attention, ne confondez pas supplémentaire et complémentaire : un supplémentaire de A dans E est un espace vectoriel tel que tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $(E, +, .)$ se décompose d'une façon unique comme somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B (exemples : l'axe imaginaire est supplémentaire de l'axe réel dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel)

Encore une question personnelle, de vérification de la connaissance du cours.

type de matrice	nom	forme	base	dimension
antisymétriques	$A_2(\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$	$(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$	1
trace nulle	$T_2(\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$	$(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$	3
symétriques	$S_2(\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$	$(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$	3

Pour les dimensions, tout va bien : $dim(A_2(\mathbb{R})) + dim(T_2(\mathbb{R})) = 4 = dim(M_2(\mathbb{R}))$.
Mais il reste un problème d'intersection : $A_2(\mathbb{R})$ est inclus dans $M_2(\mathbb{R})$.
On a donc $dim(A_2(\mathbb{R}) + T_2(\mathbb{R})) = dim(A_2(\mathbb{R})) + dim(T_2(\mathbb{R})) - dim(A_2(\mathbb{R})) = 3 \neq dim(M_2(\mathbb{R}))$

D'ailleurs, les matrices $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$ ne forment pas une base de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$.

$$0.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On veut ensuite un sous-espace E vérifient $E \oplus S_2(\mathbb{R}) = E \oplus T_2(\mathbb{R}) = M_2(\mathbb{R})$.
Sa dimension vaudra 1. Il suffit donc d'une matrice pour l'engendrer.
cette matrice ne devra ni être dans $S_2(\mathbb{R})$, ni avoir une trace nulle. Et c'est tout ce qu'on lui demande.
Je propose $Vect(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mais il y a des milliers d'autres solutions.
Vérifiez ensuite que les deux familles suivantes sont libres et sont donc des bases de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$:

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$
$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

(argument : on peut rapidement reconstruire la base canonique avec chacune, et elles ont le bon cardinal)

I∼4) Montrez que le déterminant d'une matrice antisymétrique de taille 2 est le carré de la forme linéaire $A \longmapsto {}^t E_1.A.E_2$.

En taille 2, une matrice antisymétrique a pour forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ avec a réel. On calcule : $\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2$. C'est bien un carré. Et on a aussi

$$^t(E_1).A.E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a$$

On assimile la matrice de taille 1 au réel ; on élève au carré et on a a^2 comme attendu.

II∼0) On définit : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{pmatrix}$. Montrez qu'elles ont le même déterminant. Calculez $A.B$ et déduisez que $\det(A)$ est le carré d'une application sur les coefficients de A que vous préciserez *(attention, ne pas oublier un détail)*.

Il faut passer du déterminant de $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$ à celui de $\begin{vmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{vmatrix}$ sans modification. Ou avec un nombre pair de changements de signes.

$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \\ 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \end{vmatrix}$ deux échanges de lignes

$\begin{vmatrix} -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \\ 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & f & -b & -d \\ -f & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & a \\ d & e & -a & 0 \end{vmatrix}$ deux échanges de colonnes

$\begin{vmatrix} 0 & f & -b & -d \\ -f & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & a \\ d & e & -a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -f & b & d \\ f & 0 & c & e \\ -b & -c & 0 & -a \\ -d & -e & a & 0 \end{vmatrix}$ une transposition

On n'a pas fini. Finalement, je crois que la meilleure solutions est de développer les deux déterminants :

$$a^2.f^2 + b^2.e^2 + c^2.d^2 - 2.a.b.e.f + 2.a.c.d.f - 2.b.c.d.e$$

Je suis triste de n'avoir pas trouvé de meilleure démonstration...

On effectue le produit $A.B = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$
avec $\alpha = a.f - b.e + c.d$.
On passe au déterminant : $\det(A.B) = \alpha^4$ et donc $\det(A).\det(B) = \alpha^4$.
Or, A et B ont le même déterminant : $\det(A)^2 = (a.f - b.e + c.d)^4$.
On passe à la racine : $\det(A) = (a.f - b.e + c.d)^2$.

Ah non, tiens, on peut avoir aussi $\det(A) = -(a.f - b.e + c.d)^2$.
Il faut faire un choix, et ne pas se contenter de "on passe à la racine".
On étudie la formule brute pour $\det(A)$:

$$\sum_{\sigma \in S_4} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}.a_3^{\sigma(3)}.a_4^{\sigma(4)}$$

On y trouve le terme $Sgn(\overrightarrow{(1\,2\,3\,4)}).a.d.f.(-c)$ précisément pour σ égale au cycle $\overrightarrow{(1\,2\,3\,4)}$ (signature -1). On a donc un terme $+a.d.f.c$.

On en a même deux, l'autre venant de $\begin{array}{cccc} & & & c \\ -a & & & \\ & -d & & \\ & & -f & \end{array}$ avec σ égale à $\overrightarrow{(1\,4\,3\,2)}$.

On a donc dans $\det(A)$ le terme $+2.a.d.f.c$.
Si l'on avait $\det(A) = -(a.f - b.e + c.d)^2$, on aurait $-2.a.d.f.c$. C'est donc faux.

Par élimination : $\boxed{\det(A) = (a.f - b.e + c.d)^2}$

II∼1) On définit le script suivant

```
def Mystere(L) :
....n = len(L)
....if n % 2 == 0 :
........return 0
....M = [[0 for k in range(n+1)] for i in range(n+1)]
....for i in range(n) :
........M[i][i+1] = L[i]
........M[i+1][i] = -L[i]
....return M
```

Montrez qu'il définit une matrice antisymétrique, et calculez son déterminant.

On étudie le script qui visiblement prend en entrée une liste (instruction len et usage de crochets).

```
def Mystere(L) :
....n = len(L)
```

On mesure une fois pour toutes la longueur de la liste, c'est plus pratique, et moins couteux pour le programme et pour le lecteur.

```
....if n % 2 == 0 :
........return 0
```

Si la liste est de longueur paire, on sort et on donne 0. C'est normal, car on va construire une matrice antisymétrique de taille $n+1$ sur $n+1$.

```
....M = [[0 for k in range(n+1)] for i in range(n+1)]
```

On crée une matrice de taille $n+1$ (nombre pair).

```
....for i in range(n) :
........M[i][i+1] = L[i]
........M[i+1][i] = -L[i]
```

On se promène dans $2.(n+1)$ cases de la matrice. On met $L[i]$ en position M_i^{i+1} et son opposé en position M_{i+1}^i. Ailleurs, il reste des 0.

```
....return M
```

On retourne une matrice, et elle est bien antisymétrique. En taille impaire, son déterminant est tout de suite nul... A quoi ressemble cette matrice ?

$$\begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ -a_0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 \\ -a_0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_4 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule les déterminants par développements : $(a_0)^2$, $(a_0.a_2)^2$ et enfin $(a_0.a_2.a_4)^2$.
On constate que a_1, a_3 n'ont aucun rôle.

On propose une formule : $\boxed{\Big(\prod_{k=0}^{[n/2]} L[2.k]\Big)^2 \text{ ou encore } (a_0.a_2.a_4\ldots)^2}$ qui est plus claire mais ambigüe.

On la démontre par récurrence sur la taille des matrices. Cette récurrence est déjà initialisée.
En taille $2.p$, on développe par rapport à la dernière colonne où il n'y a qu'un terme. Il est en position impaire. Son cofacteur est un déterminant comme $\begin{vmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_4 \end{vmatrix}$ qu'on développe par rapport à la dernière ligne *(terme de position diagonale, pondération en signe plus)*.
On retrouve alors la matrice en taille $2.(p-1)$. Et on voit que l'avant dernier terme de la liste n'a joué aucun rôle.
En notant $M(L)$ la matrice, on a $\det(M([a_0, \ldots a_n]) = (a_n)^2.\det(M([a_0, \ldots a_{n-2}]).$

Si la liste est de longueur impaire, on terme sur une matrice nulle, le déterminant est nul.
Si la liste est de longueur paire, on récupère le carré du produit des termes d'indices pairs, comme indiqué, par récurrence directe.

II~2) Soit D_n une matrice diagonale de taille n sur n ; calculez en fonction du déterminant de D_n le déterminant de la matrice de taille $2.n$ par blocs : $\begin{pmatrix} 0_{n,n} & -D_n \\ D_n & O_{n,n} \end{pmatrix}$.

On doit donc calculer un déterminant comme $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_2 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_3 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

On peut développer en ligne ou colonne, et aboutir ici à $(d_1.d_2)^2$ et $(d_1.d_2.d_3)^2$ si l'on n'a pas fait d'erreur en route.
On généralise en $(\det(D))^2$.
Mais il faut le prouver.
On peut inventer de toutes pièces une formule pour le déterminant d'une matrice par blocs. Il n'y en a pas, ou alors sous de grosses conditions.
On peut développer en colonne et ligne en prenant garde aux signes moins.
Et puis, on peut le jouer simple. Si si !
On échange les colonnes. Proprement, on échange C_1 avec C_{n+1}, C_2 avec C_{n+2} et plus généralement C_k avec C_{n+k}.

La matrice obtenue est $\begin{vmatrix} -d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} -d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \end{vmatrix}$ et plus généralement $\begin{vmatrix} -D_n & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & D_n \end{vmatrix}$.

On a n transpositions, d'où un signe $(-1)^n$.
La nouvelle matrice est diagonale. Son déterminant est $(-d_1).(-d_2)\dots(-d_n).d_1.d_2\dots d_n$.
Mais comme on a un $(-1)^n$devant, les signes moins sont compensés, et il reste $\left(\prod_{k=1}^{n} d_k\right)^2$ c'est à dire $\det(D)^2$.

Commentaire du rapport du jury : plein de méthodes ont été utilisées pour cette question, mais bien peu ont pu donner un résultat avec un signe correct.

II~3) Soit A une matrice antisymétrique, on suppose que A^2 est nulle. Montrez que A est nulle *(indication qui n'était pas dans le sujet : calculez ${}^t(A.E_i).(A.E_i)$ pour tout i)*.

On suppose donc $A^2 = 0_{n,n}$ *(matrice nulle de taille n)*.
On pense à calculer ${}^t(A.E_i).(A.E_i)$ comme indiqué dans mon énoncé.
Si on utilise la formule $(P.Q) =^t Q.^tP$, on trouve ${}^tE_i.{}^tA.A.E_i$ *(matrice ligne, matrice carrée, matrice carrée, matrice colonne, c'est un réel :*

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

).
On remplace : ${}^t(A.E_i).(A.E_i) = {}^tE_i.{}^tA.A.E_i = -{}^tE_i.A.A.E_i = {}^tE_i.O_{n,n}.E_i$
du type $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
On trouve 0.
Pour chaque E_i, le produit ${}^t(A.E_i).(A.E_i)$ est nul.
Mais qui est $(A.E_i)$? C'est la i^{eme} colonne de A : $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \end{pmatrix}$.
Et ${}^t(A.E_i)$ est la même n ligne.

Leur produit est une somme de carrés :

$$\begin{pmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1^2)^2 + (a_2^2)^2 + (a_3^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Mais on a montré que cette matrice de taille 1 sur 1 est nulle.

Pour tout i on a donc $\sum_{k=1}^{n} (a_k^i)^2 = 0$.

On est dans $\mathbb{R}$; une somme de carrés ne peut être nulle que si chaque terme est nul.

Pour tout i et tout k, a_i^kest nul.

La matrice est nulle.

Commentaire du jury : facile, mais mérite une rédaction claire si les candidats veulent se distinguer de ceux qui auront écrit par exemple ${}^t(A.X).A.X = 0$ donc ${}^t(A.X) = 0$ ou $A.X = 0$, donc $A = 0$.

Notons au passage la remarque du jury là aussi :

il est des formules qui sont peut être des indices que pour certains candidats les formules se suffisent à elles-mêmes et les notations induisent les formules sans se poser la question sur le sens à accorder aux relations ainsi produites.

III∼0) Dans cette partie, A est une matrice réelle antisymétrique vérifiant $A^2 + I_n = 0$. Montrez que n est pair (on posera alors $n = 2.m$) et que A est inversible. Soit U un vecteur. A quelle condition $(U,\ A.U)$ est elle libre ?

On suppose donc le temps de cette partie $A^2 = -I_n$ et évidemment ${}^tA = -A$.

Dans la formule $A^2 = -I_n$, on passe au déterminant : $\det(A)^2 = \det(-I_n) = (-1)^n$. Comme $\det(A)$ est un réel, son carré est positif. Puisque $(-1)^n$ est positif, c'est que n est pair.

On note au passage qu'on a alors même $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$.

On en déduit que $\det(A)$ est non nul. A est inversible.

Mais il y a encore mieux : $A.(-A) = I_n$. On a donc explicitement l'inverse de A : c'est $-A$.

On prend U, de taille n. $A.U$ est aussi de taille n.

On prend α et β et on suppose $\alpha.U + \beta.A.U = 0_n$ (vecteur nul de taille n).

On applique A :

$$\alpha.A.U + \beta.A^2.U = A.0_n = 0_n$$

On a donc à la fois $\alpha.U + \beta.A.U = 0_n$ et $\alpha.A.U - \beta.U = 0_n$.

On combine : $(\alpha^2 + \beta^2).U = 0$ et $(\alpha^2 + \beta^2).A.U = 0$.

Si U est un vecteur non nul, on a forcément $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, d'où $\alpha = \beta = 0$. La famille est libre.

Si U est un vecteur nul, la famille $(U,\ A.U)$ est évidemment liée...

Bilan :

$U = 0_n$	$U \neq 0_n$
$(U,\ A.U)$ liée	$(U,\ A.U)$ libre

Citation : De par son caractère “ouvert”, la question a déstabilisé les candidats. Il est vrai qu'on peut se demander ce qu'on doit vraiment prouver.

III∼1) On pose : $F = \{V \in \mathbb{R}^n \mid {}^tU.V = 0 \text{ et } {}^t(A.U).V = 0\}$. Montrez que F est un espace vectoriel, quelle est sa dimension. Montrez : $\forall V \in F,\ A.V \in F$.

L'ensemble des vecteurs V vérifiant ${}^tU.V = 0$ et ${}^t(A.U).V = 0$ est formée de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On va prouver que c'est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^n, +, .)$.

On prend V et V' vérifiant ${}^tU.V = 0$ et ${}^t(A.U).V = 0$ et ${}^tU.V' = 0$ et ${}^t(A.U).V' = 0$.

On se donne α et β. Par simple distributivité, on a ${}^tU.(\alpha.V + \beta.V') = 0$ et ${}^t(A.U).(\alpha.V + \beta.V') = 0$.

On a la stabilité d'un sous-espace vectoriel. C'est tout.

Les vecteurs V sont a priori dans $\mathbb{R}^n$: dimension n.

La condition ${}^tU.V = 0$ est de la forme $a_1.v_1 + \ldots + a_n.v_n = 0$. Elle nous fait perdre une dimension.

L'autre équation ${}^t(A.U).V = 0$ est de la forme $b_1.v_1 + \ldots + b_n.v_n = 0$. Elle nous fait perdre une autre dimension (une autre, car ce n'est pas la même équation que $a_1.v_1 + \ldots + a_n.v_n = 0$ ni même un de ses multiples, puisque U et $A.U$ sont indépendants).

Finalement, F est de dimension $n - 2$.

On prend V dans F. Il vérifie deux relations : ${}^tU.V = 0$ et ${}^t(A.U).V = 0$.

On pose $W = A.V$ et on calcule :

- ${}^tU.W = {}^tU.A.V$ mais l'hypothèse ${}^t(A.U).V = 0$ donnait ${}^tU.(-A).V = 0$ et justement ${}^tU.A.V = 0$
- ${}^t(A.U).W = {}^t(A.U).A.V = {}^tU.{}^tA.A.V = {}^tU.(-I_n).V = -{}^tU.V$; ce produit aussi est nul.

Les deux produits ${}^tU.W$ et ${}^t(A.U).W$ sont nuls, W est dans F.

III∼2) Déduisez l'existence d'une famille de vecteurs $(U_1, \ldots U_m)$ telle que $(U_1, \ldots U_m, A.U_1, \ldots A.U_m)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs deux à deux orthogonaux, et normés.
L'orthogonalité de deux vecteurs V et W c'est ${}^tV.W = 0$. Un vecteur normé vérifie ${}^tV.V = 1$.

Ce qui a été fait dans $R^{2.n}$ peut être recommencé dans F, stable par A.

On y trouve un vecteur U_2 non nul. La famille $(U_2,\ A.U_2)$ est libre dans F.

On pose alors $G = \{V \in F \mid {}^tU_2.V = 0 \ et \ {}^t(A.U_2).V = 0\}$.
C'est encore un espace vectoriel, stable par A et cette fois de dimension $n-4$.

IV∼0) Soit A une matrice antisymétrique. Montrez que $(U,V) \longmapsto {}^t U.A.V$ (notée ϕ_A^1) est une forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathbb{R}^n$.

Dans forme bilinéaire antisymétrique, il y a trois choses :
• forme : le résultat est un réel, par compatibilité des formats par exemple

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a.y'+b.z' \\ -a.x'+c.z' \\ -b.x'-c.y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.x.y'+b.x.z'-a.x'.y+\dots \end{pmatrix}$$

• bilinéaire : on démontre deux linéarités :

(U_1,V)	a pour image	${}^tU_1.A.V$		(U,V_1)	a pour image	${}^tU.A.V_1$
(U_2,V)	a pour image	${}^tU_2.A.V$		(U,V_2)	a pour image	${}^tU.A.V_2$
(U_1+U_2,V)	a pour image	${}^t(U_1+U_2).A.V$	et	(U,V_1+V_2)	a pour image	${}^tU.A.(V_1+V_2)$
$(\alpha.U_1,V)$	a pour image	${}^t(\alpha.U_1).A.V$		$(U,\beta.V)$	a pour image	${}^t(\alpha.U_1).A.V$

Il n'y a plus qu'à écrire des choses comme ${}^t(\alpha.U_1).A.V = \alpha.({}^tU_1.A.V)$ et ${}^tU.A.(V_1+V_2) = {}^t U.A.V_1 + {}^t U.A.V_2$ pour conclure.
• antisymétrique : on se donne U et V et on doit comparer $\phi_A^1(U,V)$ et $\phi_A^1(U,V)$. L'un vaut ${}^tU.A.V$ et l'autre ${}^tV.A.U$.
On peut calculer ces deux nombres explicitement :

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_1^1.v_1 & +a_1^2.v_2 & \dots & +a_1^n.v_n \\ a_2^1.v_1 & +a_2^2.v_2 & \dots & +a_2^n.v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1.v_1 & +a_n^2.v_2 & \dots & +a_n^n.v_n \end{pmatrix}$$

On trouve une somme de termes en $u_k.a_i^k.v_i$. Il y en a n^2 : $\phi(U,V) = \sum_{\substack{i\leqslant n\\ k\leqslant n}} u_k.a_i^k.v_i$.

Si on échange U et V, on trouve $\phi(V,U) = \sum_{\substack{i\leqslant n\\ k\leqslant n}} v_k.a_i^k.u_i$.

Comme les variables sont muettes, c'est aussi $\phi(V,U) = \sum_{\substack{j\leqslant n\\ q\leqslant n}} v_j.a_j^q.u_q$ ou même $\phi(V,U) = \sum_{\substack{j\leqslant n\\ q\leqslant n}} u_q.a_j^q.v_j$.

Mais par antisymétrie de la matrice A c'est aussi $-\sum_{\substack{j\leqslant n\\ q\leqslant n}} u_q.a_q^j.v_j$.

On retrouve bien l'opposé de $\phi(U,V) = \sum_{\substack{i\leqslant n\\ k\leqslant n}} u_k.a_i^k.v_i$. On a donc $\pi(V,U) = -\phi(U,V)$.

Mais il y a une façon bien plus simple de l'obtenir.
Le produit $\phi(U,V) ={}^t U.A.V$ est une matrice de taille 1 sur 1 (un réel). Elle est égale à sa transposée : $\phi(U,V) ={}^t U.A.V ={}^t ({}^t.U.A.V)$.
Mais la propriété ${}^t(P.Q) ={}^t Q.{}^tP$ donne alors $\phi(U,V) ={}^t U.A.V ={}^t V.{}^tA.{}^t({}^tU) =={}^t V.{}^tA.U$ (à quoi bon transposer deux fois un vecteur).

Commentaire du rapport du jury : Facile.
En effet, le résultat similaire pour les matrices symétriques est dans le cours de Sup et le cours de Spé.

Comme A est antisymétrique, il reste

$$\phi(U,V) ={}^t U.A.V ={}^t V.{}^tA.{}^t({}^tU) ={}^t V.{}^tA.U = -{}^tV.A.U = -\phi(V,U)$$

Et le tour est joué.

IV∼1) Une forme multilinéaire est dite alternée si elle donne 0 dès que deux vecteurs d'indices voisins sont égaux : $\forall i,\ U_i = U_{i+1} \Rightarrow \phi(U_1,\dots,U_i,U_{i+1},\dots U_n) = 0$ *(ce n'est pas (encore) la même définition que dans les cours)*.
Montrez alors que $\phi(U_1,\dots U_n)$ change de signe dès qu'on échange deux vecteurs d'indices voisins.

On prend une forme multilinéaire, qui s'annule dès qu'il y a deux vecteurs consécutifs égaux : $U_i = U_{i+1}$.
Il faut montrer que le signe change si on permute $U_n$et U_{i+1}. C'est quasiment dans le cours.
On développe $\phi(U_1,\dots U_i+U_{i+1},U_i+U_{i+1},\dots U_n)$, dont on sait qu'il est nul (deux vecteurs consécutifs égaux).

Par multilinéarité appliquée deux fois :
$0 = \phi(U_1,\dots U_i+U_{i+1},U_i+U_{i+1},\dots U_n) = \phi(U_1,\dots U_i,U_i,\dots U_n) + \phi(U_1,\dots U_i,U_{i+1},\dots U_n) + \phi(U_1,\dots U_{i+1},U_i,\dots U_n) +$

$\phi(U_1, \dots U_{i+1}, U_{i+1}, \dots U_n)$

Mais deux de ces termes sont nuls toujours à cause de deux vecteurs consécutifs égaux :
$0 = \phi(U_1, \dots U_i + U_{i+1}, U_i + U_{i+1}, \dots U_n) = \phi(U_1, \dots U_i, U_{i+1}, \dots U_n) + \phi(U_1, \dots U_{i+1}, U_i, \dots U_n)$

On fait passer de l'autre côté : $\phi(U_1, \dots U_i, U_{i+1}, \dots U_n) = -\phi(U_1, \dots U_{i+1}, U_i, \dots U_n)$.

On est passé de "alterné sur deux termes consécutifs" à "antisymétrique sur deux termes consécutifs".
On va passer ensuite à des vecteurs plus éloignés.

Rapport du jury : "un grand classique du cours sur les formes alternées".

Montrez alors que $\phi(U_1, \dots U_n)$ est nul dès que deux vecteurs d'indices distincts sont égaux.

On prend une forme alternée, et une liste où deux vecteurs d'indices distincts sont égaux : $U_i = U_k$.
En utilisant un nombre suffisant le résultat précédent (changement de signe par $\overrightarrow{(j\ j+1)}$), on place côte à côte les deux vecteurs égaux.

On a $k - i - 1$ changements de signes.

Une fois effectués les changements, on arrive à $(-1)^{k-i-1}.\phi(U_1, \dots U_i, U_k, U_{i+1}, \dots U_{k-1}, U_{k+1}, \dots U_n)$.

Cette fois, deux vecteurs consécutifs sont égaux. Le réel est nul, et le $(-1)^{k-i-1}$ n'y change rien.

Le rapport dit deux ou trois choses :
• Facile ; les candidats sont donc notés sur leur capacité à expliquer de manière concise comment ils procèdent.
• Mais il dit aussi : de très nombreux candidats ont fait preuve de fébrilité et perdu des points en n'indiquant pas le cheminement de leur pensée, même dans des questions simples (mais qui ne sont simples que parce qu'elles ont été amenées par les questions précédentes) ;
• Les correcteurs ont estimé qu'une réponse du style $\phi(U_1, \dots U_i, \dots U_j, \dots U_n) = (-1)^{j-i-1}.\phi(U_1, \dots U_j, \dots U_i, \dots U_n)$ sans aucun commentaire hormis "d'après la question précédente" *ne convenait pas.*

IV∼2) On définit maintenant $\phi_A^2 = (U_1, U_2, U_3, U_4) \longmapsto \phi_A^1(U_1, U_2).\phi_A^1(U_3, U_4) - \phi_A^1(U_1, U_3).\phi_A^1(U_2, U_4) + \phi_A^1(U_1, U_4).\phi_A^1(U_2, U_3)$. Montrez que c'est une forme quadrilinéaire alternée.

On définit donc $\phi_A^2 = (U_1, U_2, U_3, U_4) \longmapsto \phi_A^1(U_1, U_2).\phi_A^1(U_3, U_4) - \phi_A^1(U_1, U_3).\phi_A^1(U_2, U_4) + \phi_A^1(U_1, U_4).\phi_A^1(U_2, U_3)$.
Comme chaque terme $\phi_A^1(U_1, U_4).\phi_A^1(U_2, U_3)$ est le produit de deux réels, le résultat final est un réel. On a une forme.

Regardons par exemple $\phi_A^1(U_1, U_4).\phi_A^1(U_2, U_3)$.
• Pour U_2, U_3 et U_4 fixés, $U_1 \longmapsto \phi_A^1(U_1, U_4)$ et $U_1 \longmapsto \phi_A^1(U_1, U_4).\phi_A^1(U_2, U_3)$ sont linéaires.
• Pour U_1, U_3 et U_4 fixés, $U_2 \longmapsto \phi_A^1(U_2, U_3)$ et $U_2 \longmapsto \phi_A^1(U_1, U_4).\phi_A^1(U_2, U_3)$ sont linéaires.
• Pour U_1, U_2 et U_4 fixés, $U_3 \longmapsto \phi_A^1(U_2, U_3)$ et $U_3 \longmapsto \phi_A^1(U_1, U_4).\phi_A^1(U_2, U_3)$ sont linéaires.
• Pour U_1, U_2 et U_3 fixés, $U_4 \longmapsto \phi_A^1(U_1, U_4)$ et $U_4 \longmapsto \phi_A^1(U_1, U_4).\phi_A^1(U_2, U_3)$ sont linéaires.
On a la multilinéarité de chaque terme de la somme ; on a la multilinéarité de toute la somme.

Qui a oublié de démontrer "forme" et "multilinéaire" ?

Pour le caractère alterné, on prend la définition avec deux vecteurs contigus égaux. Il faut montrer que $\phi_A^2(U_1, U_1, U_3, U_4)$, $\phi_A^2(U_1, U_2, U_2, U_4)$ et $\phi_A^2(U_1, U_2, U_3, U_3)$ sont nuls.
On calcule donc

$$\phi_A^1(U_1, U_1).\phi_A^1(U_3, U_4) - \phi_A^1(U_1, U_3).\phi_A^1(U_1, U_4) + \phi_A^1(U_1, U_4).\phi_A^1(U_1, U_3)$$
$$\phi_A^1(U_1, U_2).\phi_A^1(U_2, U_4) - \phi_A^1(U_1, U_2).\phi_A^1(U_2, U_4) + \phi_A^1(U_1, U_4).\phi_A^1(U_2, U_2)$$
$$\phi_A^1(U_1, U_2).\phi_A^1(U_3, U_3) - \phi_A^1(U_1, U_3).\phi_A^1(U_2, U_3) + \phi_A^1(U_1, U_3).\phi_A^1(U_2, U_3)$$

A chaque fois, il y a deux termes opposés par construction et un terme nul par antisymétrie de ϕ_A^1.

IV∼3) On prend ici $n = 4$. Déduisez qu'il existe un réel $Pf(A)$ vérifiant
$\forall (U_1, \dots U_4) \in (\mathbb{R}^4)^4$, $\phi_A^2(U_1, \dots U_4) = Pf(A). \det(U_1, \dots U_4)$.

La question suivante est un cadeau.
Le cours dit que toute forme quadrilinéaire alternée sur $\mathbb{R}^4$ est proportionnelle au déterminant.
Et ϕ_A^2 est une forme quadrilinéaire alternée.
Et on l'a définie ici sur $\mathbb{R}^4$.
Il existe donc un réel λ, qui a priori dépend de A vérifiant $\phi_A^2 = \lambda. \det_C$ (le déterminant vu comme forme sur les familles de quatre vecteurs). On le note $Pf(A)$, et ce sera lui le Pfaffien.

IV∼4) Explicitez $Pf(A)$ à l'aide des coefficients de A.

On se souvient que pour le calculer, il suffit de prendre un cas particulier. Et le meilleur cas particulier est celui de la base canonique.
On a alors $\phi_A^2(E_1, E_2, E_3, E_4) = Pf(A).\det(E_1, E_2, E_3, E_4) = Pf(A).1$.

On va donc juste calculer $\phi_A^1(E_1, E_2).\phi_A^1(E_3, E_4) - \phi_A^1(E_1, E_3).\phi_A^1(E_2, E_4) + \phi_A^1(E_1, E_4).\phi_A^1(E_2, E_3)$.
On doit juste calculer des termes en $\phi_A^1(E_i, E_k)$, c'est à dire ${}^t(E_i).A.E_k$.

On écrit explicitement : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ -a_1^2 & 0 & a_2^3 & a_2^4 \\ -a_1^3 & -a_2^3 & 0 & a_3^4 \\ -a_1^4 & -a_2^4 & -a_3^4 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et ses variantes en déplaçant les deux 1.
Ici, on récupère $\phi_A^1(E_1, E_2) = a_1^2$.
La formule générale est donc $\phi_A^1(E_i, E_k) = a_i^k$.
On reprend la somme

$$\phi_A^1(E_1, E_2).\phi_A^1(E_3, E_4) - \phi_A^1(E_1, E_3).\phi_A^1(E_2, E_4) + \phi_A^1(E_1, E_4).\phi_A^1(E_2, E_3)$$

et on la transcrit :

$a_1^2.a_3^4 - a_1^3.a_2^4 + a_1^4.a_2^3$ et on reconnaît a. de la formule avec $a.f - b.e + c.d$ pour la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$

V∼0) On définit ensuite $\phi_A^3(U_1, \dots U_6) = \sum_{k=2}^6 (-1)^k.\phi_A^1(U_1, U_k).\phi_A^2(U_2, \dots U_{k-1}, U_{k+1} \dots, U_6)$ *(la notation étant ambigüe, le premier terme de la somme est $\phi_A^1(U_1, U_2).\phi_A^2(U_3, U_4, U_5, U_6)$et le dernier est $\phi_A^1(U_1, U_6).\phi_A^2(U_2, U_3, U_4, U_5)$)*. Montrez que c'est une forme hexalinéaire alternée.

On va se contenter à notre niveau de ϕ_A^3, sachant que le sujet s'intéressait à ϕ_A^n en taille $2.n$ sur $2.n$.

La formule est

$$\phi_A^3(U_1, \dots U_6) = \sum_{k=2}^{6} (-1)^k.\phi_A^1(U_1, U_k).\phi_A^2(U_2, \dots U_{k-1}, U_{k+1} \dots, U_6)$$

Le résultat est de la forme $\sum_k (-1)^k \times reel \times reel$, c'est un réel.

On fixe U_2 à U_n. On a une formule du type $U_1 \longmapsto \sum_k (-1)^k.\phi_A^1(U_1, U_k).\lambda_k$. C'est une somme de formes en U_1 ; c'est une forme linéaire en U_1.
On se donne un indice i, on fixe tout le monde sauf U_i. On a alors

$$(-1)^i.\phi_A^1(U_1, U_i).\phi_A^2(U_2, \dots U_{i-1}, U_{i+1} \dots, U_6) + \sum_{k \neq i} (-1)^k.\phi_A^1(U_1, U_k).\phi_A^2(U_2, \dots U_{k-1}, U_{k+1} \dots, U_6)$$

Dans cette formule, le premier terme est du type $(-1)^i.\phi_A^1(U_1, U_i).\alpha$. Il est linéaire en U_1. Les autres termes sont de la forme $\mu_k.\phi_A^2(U_2, \dots U_{k-1}, U_{k+1} \dots, U_6)$, et ϕ_A^2 est linéaire par rapport à chacun de ses quatre vecteurs, en particulier U_i qui fait partie de la liste. Cette combinaison de formes linéaires en U_i est une forme linéaire en U_i.

On passe au caractère alterné, avec sa définition de l'énoncé : "dès que deux vecteurs d'indices contigus sont égaux, la forme donne 0".
Mais attention, il y a deux cas.

• les deux vecteurs égaux sont U_i et U_{i+1} avec i au moins égal à 2.

Dans $\sum_{k=2}^{6} (-1)^k.\phi_A^1(U_1, U_k).\phi_A^2(U_2, \dots U_{k-1}, U_{k+1} \dots, U_6)$, on met de côté deux termes :
∘ les termes d'indices i et $i+1$:
$(-1)^i.\phi_A^1(U_1, U_i).\phi_A^2(U_2, \dots U_{i-1}, U_i, U_{i+2} \dots, U_6)$ et

$$(-1)^{i+1}.\phi_A^1(U_1, U_i).\phi_A^2(U_2, \dots U_{i-1}, U_i, U_{i+2} \dots, U_6)$$

Ils se compensent parfaitement.

○ les termes d'indices k différent de i et $i+1$: $(-1)^k.\phi_A^1(U_1,U_k).\phi_A^2(U_2,\dots U_{k-1},U_{k+1}\dots,U_6)$; cette fois, dans $\phi_A^2(U_2,\dots U_{k-1},U_{k+1}\dots,U_6)$, il y a deux termes égaux : U_i et U_{i+1} (tous deux présents, puisque le terme effacé a un autre indice).
La somme est nulle. Merci.

• les deux vecteurs égaux sont U_1 et U_2.
On distingue dans $\sum_{k=2}^{6}(-1)^k.\phi_A^1(U_1,U_k).\phi_A^2(U_2,\dots U_{k-1},U_{k+1}\dots,U_6)$ un terme à part
○ le terme d'indice $k=2$ vaut $(-1)^2.\phi_A^1(U_1,U_1).\phi_A^2(U_3,\dots,U_6)$; c'est par caractère alterné de ϕ_A^1 qu'il est nul
○ les termes d'indice plus grand que 2 : $\sum_{k=3}^{6}(-1)^k.\phi_A^1(U_1,U_k).\phi_A^2(U_1,\dots U_{k-1},U_{k+1}\dots,U_6)$. Il y a là quatre termes :

$-\phi_A^1(U_1,U_3).\phi_A^2(U_1,U_4,U_5,U_6)$	$+\phi_A^1(U_1,U_4).\phi_A^2(U_1,U_3,U_5,U_6)$
$-\phi_A^1(U_1,U_5).\phi_A^2(U_1,U_3,U_4,U_6)$	$+\phi_A^1(U_1,U_6).\phi_A^2(U_1,U_3,U_4,U_5)$

On les explicite un à un :

$$-\phi_A^1(U_1,U_3).\Big(\phi_A^1(U_1,U_4).\phi_1^1(U_5,U_6)-\phi_A^1(U_1,U_5).\phi_1^1(U_4,U_6)+\phi_A^1(U_1,U_6).\phi_1^1(U_4,U_5)\Big)$$

$$+\phi_A^1(U_1,U_4).\Big(\phi_A^1(U_1,U_3).\phi_1^1(U_5,U_6)-\phi_A^1(U_1,U_5).\phi_1^1(U_3,U_6)+\phi_A^1(U_1,U_6).\phi_1^1(U_3,U_5)\Big)$$

$$-\phi_A^1(U_1,U_5).\Big(\phi_A^1(U_1,U_3).\phi_1^1(U_4,U_6)-\phi_A^1(U_1,U_4).\phi_1^1(U_3,U_6)+\phi_A^1(U_1,U_6).\phi_1^1(U_3,U_4)\Big)$$

$$+\phi_A^1(U_1,U_6).\Big(\phi_A^1(U_1,U_3).\phi_1^1(U_4,U_5)-\phi_A^1(U_1,U_4).\phi_1^1(U_3,U_5)+\phi_A^1(U_1,U_5).\phi_1^1(U_3,U_4)\Big)$$

Deux à deux, les termes se simplifient.

Que nous dit la rapport du jury pour cette question ? Que bien des élèves ont oublié de traiter le cas d'égalité de U_1 et U_2.
Sachant que la preuve devait être donnée pour le passage à $2.n$ vecteurs et pas juste 6, et que la preuve sa faisait en exprimant ϕ_A^n à l'aide de ϕ_A^{n-1} puis ϕ_A^{n-2}, on peut se dire que c'est normal que peu d'élèves aient abordé la question.
On peut même se dire qu'entre l'élève qui aura perdu douze minutes à tenter de traiter le cas $U_1=U_2$ et celui qui n'aura même pas vu qu'il y avait ce cas à traiter, tous deux auront perdu des points, mais l'un aura perdu aussi du temps. N'aura sû gagner des points que celui qui aura mentionné "il faudrait aussi montrer le cas $U_1=U_2$". Celui là aura une démarche d'ingénieur.

V∼1) On prend ici $n=6$. Déduisez qu'il existe un réel $Pf(A)$ vérifiant
$\forall(U_1,\dots U_6)\in(\mathbb{R}^6)^6,\ \phi_A^3(U_1,\dots U_6)=Pf(A).\det(U_1,\dots U_6)$.

On a prouvé que ϕ_A^3 est 6-linéaire alternée, donc antisymétrique. On suppose qu'en plus ici, $\mathbb{R}^n$ est exactement $\mathbb{R}^6$.
On a une forme n linéaire antisymétrique sur $\mathbb{R}^n$. Le cours garantit qu'elle est proportionnelle au déterminant, dans un rapport qu'on peut noter λ ou même $Pf(A)$ puisqu'il dépend de A.
$\exists\lambda,\ \forall(U_1,U_2,U_3,U_4,U_5,U_6),\in(\mathbb{R}^6)^6,$

$$\phi_A\left(\begin{pmatrix}a_1^1\\a_2^1\\a_3^1\\a_4^1\\a_5^1\\a_6^1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1^2\\a_2^2\\a_3^2\\a_4^2\\a_5^2\\a_6^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1^3\\a_2^3\\a_3^3\\a_4^3\\a_5^3\\a_6^3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1^4\\a_2^4\\a_3^4\\a_4^4\\a_5^4\\a_6^4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1^5\\a_2^5\\a_3^5\\a_4^5\\a_5^5\\a_6^5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1^6\\a_2^6\\a_3^6\\a_4^6\\a_5^6\\a_6^6\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}a_1^1&a_1^2&a_1^3&a_1^4&a_1^5&a_1^6\\a_2^1&a_2^2&a_2^3&a_2^4&a_2^5&a_2^6\\a_3^1&a_3^2&a_3^3&a_3^4&a_3^5&a_3^6\\a_4^1&a_4^2&a_4^3&a_4^4&a_4^5&a_4^6\\a_5^1&a_5^2&a_5^3&a_5^4&a_5^5&a_5^6\\a_6^1&a_6^2&a_6^3&a_6^4&a_6^5&a_6^6\end{vmatrix}$$

On aurait pu ensuite demander de calculer le Pfaffien dans un cas particulier d'une matrice antisymétrique avec pas mal de 0.

V∼2) Soit A une matrice antisymétrique de taille 6 et M une matrice de taille 6. Montrez que ${}^tM.A.M$ est antisymétrique. Montrez $Pf({}^tM.A.M)=\det(M).Pf(A)$.

On a A antisymétrique et M carrée simple. Les formats sont compatibles. On peut calculer ${}^tM.AM$.
On calcule sa transposée : ${}^t({}^tM.AM.)={}^tM.{}^tA.{}^t({}^tM)$ (toujours la formule ${}^t(P.Q)={}^tQ.{}^tP$).
On a simplement ${}^t({}^tM)=M$, et aussi ${}^tA=-A$.
On a alors ${}^t({}^tM.AM.)={}^tM.(-A).M=-{}^tM.AM$. On retrouve la définition de la matrice antisymétrique.
On pose $B={}^tM.A.M$. C'est une matrice antisymétrique. On peut alors étudier l'application ϕ_B^1 pour commencer (petite initiative personnelle, avant d'attaquer ϕ_B^3).
On a $\phi_B^1(U,V)={}^tU.({}^tM.A.M).V=({}^tU.{}^tM).A.(M.V)$ par associativité.
Toujours selon la même formule $\phi_B^1(U,V)={}^tU.({}^tM.A.M).V={}^t(M.U).A.(M.V)$.

On reconnaît $\boxed{\phi_B^1(U,\ V) = \phi_A^1(M.U,\ M.V)}$

On reporte dans la définition : $\phi_B^2(U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4) = \phi_A^2(M.U_1,\ M.U_2,\ M.U_3,\ M.U_4)$ pour tout quadruplet de vecteurs (sommes et produits de termes en $\phi_A^1(U,V)$).

On poursuit $\phi_B^3(U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ U_5,\ U_6) = \phi_A^3(M.U_1,\ M.U_2,\ M.U_3,\ M.U_4,\ M.U_5,\ M.U_6)$.
On applique la définition du Pfaffien :
$Pf(B).\det(U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ U_5,\ U_6) = Pf(A).\det(M.U_1,\ M.U_2,\ M.U_3,\ M.U_4,\ M.U_5,\ M.U_6)$.
Mais le cours nous dit aussi directement $\det(M.U_1,\ M.U_2,\ M.U_3,\ M.U_4,\ M.U_5,\ M.U_6) = \det(M).\det(U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ U_5,\ U_6)$ (dans cette formule, un temps, le déterminant est celui d'une famille de vecteurs, un temps il est celui d'une matrice carrée)
On a donc $Pf(B).\det(U_1,U_2,U_3,U_4,U_5,U_6) = Pf(A).\det(M).\det(U_1,U_2,U,U_4,U_5,U_6)$ pour toute famille de vecteurs $(U_1,\dots U_6)$.
On l'applique à une famille libre pour pouvoir simplifier par le déterminant : $PfB) = Pf(A).\det(M)$.

Il reste ensuite à l'appliquer à une matrice M bien choisie, et à enchainer les question.
Si vous la voulez, je peux vous passer le sujet, et vous pouvez le trouver sur internet (en particulier sur Gargantua, le serveur des archives du concours de Polytechnique).
Sachez quand même que les dernières questions n'ont été abordées par aucun candidat, faute de temps sans doutes.
Ceci n'a évidemment pas empêché certaines copies d'atteindre la note maximale de 20.
Le jury indique qu'il y avait quand même sur la fin des questions où l'on pouvait aller chercher des points, comme $Pf({}^tM.A.M) = Pf(A).\det(M)$.
Le jury indique aussi que la différence s'est surtout faite sur des questions simples, mais discriminantes comme $\det(A) = 0$ *pour A impaire et antisymétrique...*

Enfin, une question quand même : vous avez vu ce sujet de la filière P.C. ; vous m'autorisez encore à dire que les P.C. sont des gens qui ne savent pas faire de maths ?

∘3∘

Pour tout entier naturel on pose : $f_n = x \longmapsto x^n.e^{1/x}$. Calculez $(f_n)^{(n+1)}$ pour n de 0 à 3. Émettez une conjecture.
Montrez : $(f_{n+1})' = (n+1).f_n - f_{n-1}$. Démontrez votre résultat par récurrence sur n.
φ est une application de classe C^∞. Pour tout n on définit $h_n = x \longmapsto x^n.h\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Calculez $(h_n)^{(n+1)}$ en utilisant au bon moment la formule de Leibniz.

Un classique souvent posé avec juste la dernière question.
Posé à l'oral, il permet pour moi de voir qui a bien compris comment raisonner, et qui cafouille encore.
n intervient à deux endroits dans le x^n de la fonction
et dans le $f^{(n)}$ de l'ordre de dérivation.
La récurrence ne peut donc pas porter juste sur le nombre de dérivation d'une fonction.
On dérive deux fois $x \longmapsto x.f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
trois fois $x \longmapsto x^2.f\left(\dfrac{1}{x}\right)$
quatre fois $x \longmapsto x^3.f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Mais on devra dériver $n+1$ fois $x \longmapsto x^n.f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, et on ne saura guère de choses de sa dérivée première, seconde, troisième... juste la $+1^{ieme}$.
Et il faudra relier $\left(x \longmapsto x^{n-1}.f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{(n)}$ à $\left(x \longmapsto x^n.f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{(n+1)}$
et pas $\left(x \longmapsto x^{n-1}.f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{(n)}$ à $\left(x \longmapsto x^{n-1}.f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{(n+1)}$

∘4∘

Calculez $(\sin^3)^{(10)}(0)$ et $(\sin^3)^{(11)}(0)$.

Comment interpréter $(\sin^3)^{(10)}(0)$? C'est déjà là dessus qu'on va vous juger.
Entrons à l'intérieur de la formule : $\sin^3$ est une fonction (c'est $x \longmapsto \sin^3(x)$).
Les parenthèses en l'air disent qu'on va la dériver dix fois.
Et le (0) dit qu'on va calculer cette dérivée dixième en 0.
C'est comme $f^{(n)}(a)$ avec $a = 0$, $n = 10$ et $f = \sin^3$ quoi !

Maintenant, c'est un exercice sur la formule de Leibniz ? Mais avec trois termes ?

Non, c'est déjà un exercice de trigonométrie.
On va linéariser $\sin^3$ pour la rendre facile à dériver.

$$\sin^3(x) = \Big(\frac{e^{i.x} - e^{-i.x}}{2.i}\Big)^3 = \frac{e^{3.i.x} - e^{-3.i.x} - 3.e^{i.x} + 3.e^{-i.x}}{8.i^3} = \frac{3.\sin(x) - \sin(3.x)}{4}$$

On va pouvoir dériver autant de fois qu'on veut :

$f(x) =$	$\frac{3.\sin(x)}{4}$	$-\frac{\sin(3.x)}{4}$
$f'(x) =$	$\frac{3.\cos(x)}{4}$	$-\frac{3.\cos(3.x)}{4}$
$f''(x) =$	$-\frac{3.\sin(x)}{4}$	$+\frac{9.\sin(3.x)}{4}$
$f^{(3)}(x) =$	$-\frac{3.\cos(x)}{4}$	$+\frac{27.\cos(3.x)}{4}$
$f^{(4)}(x) =$	$\frac{3.\sin(x)}{4}$	$-\frac{81.\sin(3.x)}{4}$
$f^{(10)}(x) =$	$-\frac{3.\sin(x)}{4}$	$+\frac{3^{10}.\sin(3.x)}{4}$
$f^{(11)}(x) =$	$-\frac{3.\cos(x)}{4}$	$+\frac{3^{11}.\cos(3.x)}{4}$

On calcule en 0 : $f^{(10)}(0) = 0$ (normal pour une application impaire
$f^{(11)}(0) = \dfrac{3^{11} - 3}{4}$

∘5∘ Montrez que $\sum_{k=1}^{n} k.\ln(k)$ est équivalent à $\dfrac{n^2.\ln(n)}{2}$ quand n tend vers l'infini.

On étudie la croissance de $x \longmapsto x.\ln(x)$ sur $[1, +\infty[$. Elle croît.
On encadre donc chaque $k.\ln(k)$ par $\int_{k-1}^{k} t.\ln(t).dt$ et $\int_{k}^{k+1} t.\ln(t).dt$.
On somme ces encadrements, et on a donc $\int_{1}^{n} t.\ln(t).dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} k.\ln(k) \leqslant \int_{1}^{n+1} t.\ln(t).dt$.
On a laissé de côté la première fois le terme $1.\ln(1)$ pour ne pas créer un intempestif $\int_{0}^{1} t.\ln(t).dt$.

On intègre explicitement (par parties) : $\dfrac{x^2.\ln(x)}{2} - \dfrac{x^2}{4}$.
En notant (A_n) notre suite, on a obtenu $\dfrac{2.n^2.\ln(n) - n^2}{4} - \alpha \leqslant A_n \leqslant \dfrac{2.(n+1)^2.\ln(n+1) - (n+1)^2}{4} - \beta$ où α et βsont deux réels explicitables mais ne dépendant pas de n.
On divise :

$$1 - \frac{1}{2.\ln(n)} - \frac{\alpha}{n^2.\ln(n)/2} \leqslant \frac{A_n}{\frac{n^2.\ln(n)}{2}} \leqslant \frac{(n+1)^2.\ln(n+1)}{n^2.\ln(n)} - \frac{(n+1)^2}{2.n^2.\ln(n)} - \frac{\beta}{n^2.\ln(n)/2}$$

Les termes comme $\dfrac{1}{2.\ln(n)}$ et $\dfrac{\alpha}{n^2.\ln(n)/2}$ tendent vers 0.
De même pour $\dfrac{(n+1)^2}{2.n^2.\ln(n)}$ puisque $\dfrac{(n+1)^2}{n^2}$ tend vers 1.
Il reste $\dfrac{(n+1)^2.\ln(n+1)}{n^2.\ln(n)}$ à faire tendre vers 1. On sait que déjà $\dfrac{(n+1)^2}{n^2}$ tend vers 1.
Et $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$ s'écrit $\dfrac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}$ et il tend aussi vers 1.
Par encadrement, le terme du milieu tend vers 1, et c'est la définition de l'équivalence de deux suites.

∘6∘ ♡ Calculez $\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(p+q^2).(p+q^2+1)}$ quitte à intervertir les deux sommes (familles sommables ?).

Tous les termes sont positifs, il suffit que l'un des résultats obtenus par théorème de Fubini existe pour que tous existent et soient égaux.

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(p+q^2).(p+q^2+1)}\Big)=\sum_{q=1}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+q^2).(p+q^2+1)}\Big)=\sum_{q=1}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+q^2)}-\frac{1}{(p+q^2+1)}\Big)$$

(Fubini et décomposition en éléments simples)

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(p+q^2).(p+q^2+1)}\Big)=\sum_{q=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{q^2}-\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{(p+q^2+1)}\Big)=\sum_{q=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{q^2}\Big)=\zeta(2)$$

Cette fois, on a eu un télescopage et une illumination.

∘7∘

♡ Complétez ce qui manque : $\begin{pmatrix}1\\ \\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\\ \end{pmatrix}$.

On écrit $\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}b\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\\c\end{pmatrix}$ sous forme de trois équations et trois inconnues. La première donne $-a-3.b=-5$: a vaut 2. La seconde donne $b+1=2$ donc $b=1$. La dernière donne c :

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix}$$

∘8∘

♠ Comparez $\det(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b})$ et $\det(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ quand $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ *(une démonstration pourra utiliser la formule du double produit vectoriel)*.

On peut regarder sur des exemples : $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{k}$ donne 1 et 1 pour chacun des déterminants.
On peut aussi prendre $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{j}$: les deux sont nuls.
Et pourquoi pas $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{j}$: dans ce cas $\det(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b})$ vaut 1 et $\det(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ vaut -1.

Il y a une approche qui part de $\det(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}.(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c})$.
On a donc

$$\det(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b})=(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c}).\Big((\overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a})\wedge(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b})\Big)$$

On développe $\Big((\overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a})\wedge(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b})\Big)$ par formule du double produit vectoreil avec
$\Big((\overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a}).\overrightarrow{a}\Big)\times\overrightarrow{b}$ et $(\overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a}).\overrightarrow{c}\Big)\times\overrightarrow{b}$
Finalement $\det(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b})=(\det(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}))^2$.

Mais il y a tellement mieux. $(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b})$ est justement la comatrice de la matrice initiale M de colonnes $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$.
On sait aussi $M^{-1}=\dfrac{1}{\det(M)}.{}^tCom(M)$.
On passe au déterminant : $\det(M^{-1})=\Big(\dfrac{1}{\det(M}\Big)^3.\det({}^tCom(M))$ (attention, c'est bien λ^3 qui sort dans $\det(\lambda.M)$).
Avec les formules du déterminant, il reste $\dfrac{1}{\det(m)}=\Big(\dfrac{1}{\det(M}\Big)^3.\det(Com(M))$.
On simplifie : $\boxed{\det(Com(M))=(\det(M))^2}$

Attention, si $\det(M)$ est nul, ce raisonnement n'est pas possible.

Mais que fait on si $\det(M)$ est nul ? Les trois vecteurs , $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ sont coplanaires.
Les trois vecteurs $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a}$ sont orthogonaux à ce plan.
Donc colinéaires.
Le déterminant $(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b})$ est nul aussi.
L'égalité $\det(Com(M))=(\det(M))^2$ reste vraie.

∘9∘ ♡ Dérivez cette application (comptez bien) $(x \longmapsto \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ x & 2 & 3 & 1 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix})'$.

$(x \longmapsto \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ x & 2 & 3 & 1 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix})'$ est déjà une dérivée *(la dérivée première d'un polynôme en x)*. Il faut encore dériver. On en est à la dérivée seconde. Il ne reste rien. Sauf si la fonction initiale est un polynôme de degré 2. Et c'est le cas, il y a un terme en x^2, issu par exemple de $\begin{vmatrix} & & 4 & \\ x & & & \\ & x & & \\ & & & 1 \end{vmatrix}$.

Pour avoir un terme de degré 2 il faut déjà mettre un x quand on développe par rapport à la première colonne : $-x.\begin{vmatrix} & 2 & 4 & 5 \\ * & & & \\ & x & 1 & 1 \\ & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \textit{autres}$. Et il faut mettre encore un x en redévéloppant : $-x.(-x).\begin{vmatrix} & & 4 & 5 \\ * & & & \\ & * & & \\ & & 2 & 1 \end{vmatrix}$. Il y a finalement deux termes en x^2 dans le déterminant, avec coefficient total $4-10$. On dérive deux fois ce $(-6.x)^2$ et on a $\boxed{-12}$ Si vous avez perdu du termes, vous avez dérivé deux fois $x \longmapsto -6.x^2 + 12.x - 8$.

∘10∘ De même qu'on peut développer un déterminant par rapport à une colonne faite de n termes avec chacun son cofacteur, il existe une formule où l'on développe par rapport à deux colonnes, somme de termes du type "déterminant de taille 2 fois déterminant de taille $n-2$". Combien de termes de ce type ?
Quel est le signe du terme $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$ dans le déterminant de taille 5 ?

Cette formule, vous la connaissez en taille 3 :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} & & c \\ & & \\ & & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ & \\ a'' & b'' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} & & \\ & & c' \\ & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \\ & \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & c'' \end{vmatrix}$$

(je n'ai pas envisagé la taille 2).

Dans le déterminant de taille n il y a $n!$ termes.
dans un déterminant de taille 2 il y a deux termes, dans un déterminant de taille $(n-2)$ il y en a $(n-2)!$.
Dans le produit d'un déterminant de taille 2 multiplié par un déterminant de taille $n-2$ il y a $2.(n-2)!$ termes.

Si il n'y a pas de termes en trop qui se simplifient mutuellement, dans k produits « déterminant de taille 2 fois déterminant de taille $n-2$ » il y a $k.2.(n-2)!$ termes.

On en veut $n!$ au total ?

Prenons $2.k.(n-2)! = n!$ et déterminons

$$k = \frac{n!}{2.(n-2)!} = \frac{n.(n-1)}{2}$$

on constate que c'est un entier.

Imaginons le calcul de $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^1 & a_5^2 & a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$ contenant $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & & & \\ & & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_3^1 & a_3^2 & & & \\ & & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ & & a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$ qui est l'objet de notre énoncé.

Or, dans la grande formule du déterminant, on a justeremtdes termes issus de $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$

que je vais écrire $\begin{matrix} a_1^1 & .a_3^2 \\ -a_3^1 & .a_1^2 \end{matrix} \times \begin{matrix} a_2^3.a_4^4.a_5^5 & - & a_2^3.a_5^4.a_4^5 \\ +a_4^3.a_5^4.a_2^5 & - & a_4^3.a_2^4.a_5^5 \\ +a_5^3.a_2^4.a_{5_4} & - & a_5^3.a_4^4.a_2^5 \end{matrix}$.

On y trouve par exemple $a_1^1.a_3^2.a_2^3.a_4^4.a_5^5$.
Ce terme est présent dans le grand déterminant avec coefficient -1 (un bicycle).

On y trouve par exemple $a_1^1.a_3^2.a_2^3.a_5^4.a_4^5$.
Ce terme est présent dans le grand déterminant avec coefficient $+1$ (deux bicycles).

Si on veut, on fait demême avec les dix autres termes.

On a donc $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^1 & a_5^2 & a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix} = \ldots - \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix} + \ldots$

◦11◦

♡ Résolvez $(\overrightarrow{i} + ♣.\overrightarrow{j} + ♢.\overrightarrow{k}) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{j} + 3.\overrightarrow{k}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ sachant que $\overrightarrow{i} + 3.\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ est une des solutions.
Existe-t-il une solution dont la composante suivant $\overrightarrow{j}$ est nulle ?

L'égalité $\begin{pmatrix} 1 \\ ♣ \\ ♢ \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est vérifiée puisque le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une solution.
On a donc $-♣ - 3.♢ = 0$, $♢ + 1 = 1$ et $3 - ♣ = 3$. On trouve les deux valeurs : $♣ = 0$, $♢ = 0$ et la dernière équation est vérifiée.

On résout à présent $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Mais on connaît une solution. Et les solutions homogènes sont aussi connues.
On a donc toutes les solutions : $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Impossible d'annuler la composante suivant $\overrightarrow{j}$.

◦12◦

♡ Comparez $X \longmapsto A.X$ et $\overrightarrow{u} \longmapsto \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.
En étudiant $A.B.X$, retrouvez la formule du double produit vectoriel.

On se donne un vecteur quelconque $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on compare

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b.z - c.y \\ c.x - a.z \\ a.y - b.x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On se donne alors deux vecteurs a et b. Puisque chaque application $\overrightarrow{u} \longmapsto \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{b} \longmapsto \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{u}$ s'écrit matriciellement $U \longmapsto M_A.U$ et $U \longmapsto M_B.U$, on peut les composer.
$\overrightarrow{u} \longmapsto \overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{u})$ s'écrit $U \longmapsto M_B.(M_A.U)$.
Par associativité, on va calculer $M_B.M_A$ (formats compatibles).

$$\begin{pmatrix} 0 & -c' & b' \\ c' & 0 & -a' \\ -b' & a' & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c.c' - b.b' & a.b' & a.c' \\ b.a' & -a.a' - c.c' & b.c' \\ c.a' & c.b' & -a.a' - b.b' \end{pmatrix}$$

On l'écrit $\begin{pmatrix} a.a' & a.b' & a.c' \\ b.a' & b.b' & b.c' \\ c.a' & c.b' & c.c' \end{pmatrix} - \lambda.I_3$ avec $\lambda = a.a' + b.b' + c.c'$.

C'est même $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix} - \lambda.I_3$.

Si on revient à la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On reconnaît alors $\mu \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \lambda \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, c'est à dire $\mu \times \overrightarrow{a} - \lambda \times \overrightarrow{u}$, avec $\mu = \overrightarrow{b} . \overrightarrow{u}$ et $\lambda = \overrightarrow{a} . \overrightarrow{b}$.

On a donc démontré :

$$\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{b} . \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{a} - (\overrightarrow{a} . \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{u}$$

C'est la formule du double produit vectoriel.

◦13◦ ♡ On donne la formule du double produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$:
$(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} . \overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b} . \overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{a}$ pour tout triplet $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ de $\mathbb{R}^3$
Vérifiez la pour des triplets de la base canonique comme $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i})$, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{j})$.
Vérifiez que le vecteur du membre de droite est bien orthogonal à $\overrightarrow{c}$.
Vérifiez que le vecteur du membre de droite est bien orthogonal à tout vecteur orthogonal à $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.
Démontrez la formule si vous en avez le courage avec neuf coefficients pour les composantes de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ *(si cette partie de l'exercice vous plait, ne m'adressez plus la parole).*
Comparez $(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c})$.

◦14◦ ♡ Calculez $(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c} + (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) \wedge \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}) \wedge \overrightarrow{b}$.

Montrez que l'équation $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ n'a pas de solution.
Montrez que l'équation $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ a une infinité de solutions.

On se donne $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ et on veut résoudre l'équation $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{b}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$. Montrez qu'il faut déjà que $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ soient orthogonaux.

On suppose à présent $\overrightarrow{a}$ orthogonal à $\overrightarrow{b}$. Montrez que $\dfrac{\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|^2}$ *(noté $\overrightarrow{u_0}$)* est une solution de l'équation *(utilisez ici la formule du double produit vectoriel).*
Montrez que $\overrightarrow{u}$ est solution si et seulement si $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u_0}$ est colinéaire à $\overrightarrow{a}$.
Donnez toutes les solutions de l'équation.
(Quelle est celle dont la norme est la plus courte ?)

◦15◦ ♡ Complétez $(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$ en base de $\mathbb{R}^3$ sachant que sur cette base, $\overrightarrow{i}$ a pour composantes $(1, 0, 1)$ et que $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ a les mêmes composantes sur cette base que sur la base canonique.

On doit compléter un vecteur en base de $\mathbb{R}^3$, il en manque deux autres, qu'on va appeler $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ (non coplanaires avec $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$).

Le fait que $\overrightarrow{i}$ ait pour anciennes composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (base canonique) et nouvelles $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ signifie : $\overrightarrow{i} = 1.\overrightarrow{a} + 0.\overrightarrow{b} + 1.\overrightarrow{c}$.
Ceci nous donne $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{a}$ c'est à dire $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{j}$.

Quant à $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ ses c omposantes sur la base canonique et la nouvelle sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a donc $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$.
On a donc $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} - \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} = 3.\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. Sauf erreur de calcul.

◦16◦ Calculez $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & -1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & -1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & -1 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. (non, pas de rapport)

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x^2 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e+d.x & d & c & b & a-x \end{vmatrix}$$

calcul : $C_1 := C_1 + x.C_2$ pour éliminer le $-x$

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ -x^3 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e+d.x+c.x^2 & d & c & b & a-x \end{vmatrix}$$

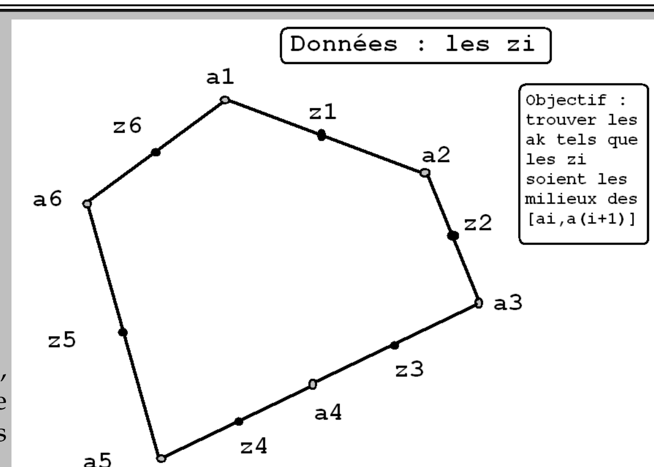
calcul : $C_1 := C_1 + x^2.C_3$ pour éliminer le $-x^2$
et ainsi de suite

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ S & d & c & b & a-x \end{vmatrix}$$

en continuant $C_1 := C_1 + x^3.C_4 + x^4.C_5$
avec $S = e + d.x + c.x^2 + b.x^3 + (a-x).x^4$
Finalement, en développant ensuite par rapport à la colonne où il n'y a que s : $x^5 - (a.x^4 + b.x^3 + c.x^2 + d.x + e)$
car le cofacteur $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \end{vmatrix}$ vaut 1.
Et l'idée se généralise.

$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & -1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & -1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & -1 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & -1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & -1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & -1 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ avec $S = a + b + c + d + e$ en additionnant toutes les lignes sur la première.
Le déterminant vaut $(a + b + c + d + e)$.
On pouvait aussi développer par rapport à la première colonne et calculer chaque cofacteur, égal à $(-1)^{quelquechose}$ qui est compensé par le $(-1)^{i+k}$ de l'alternance de signes.

◦17◦



$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est elle inversible ?

On se donne 9 points A_1 à A_9 dans le plan complexes, d'affixes z_1 à z_9. Montrez qu'il existe une unique famille de points M_1 à M_9 tels que les A_k soient les milieux des côtés du polygone $(M_1, \ldots M_9)$.

A-t-on le même résultat pour dix points ?

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, car son déterminant vaut 2.

Comment l'obtenir ? On soustrait la première ligne sur la seconde : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

On soustrait la seconde sur la troisième : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

On soustrait la troisième sur la quatrième : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

On termine avec la quetrième sur la cinquième : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

On développe par rapport à la dernière ligne $D = 2.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$

Et in calcule même son inverse si nécessaire

$$\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note que sur la matrice de taille 4 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ le même algorithme conduit à un déterminant nul.

On généralise même • taille impaire : non nul,
• taille paire : nul

Notons z_1 à z_9 les affixes des points imposés.
Et on cherche des affixes de neuf points a_1 à a_9.
La condition « être le milieu de » devient $z_k = \dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$ (avec à la fin $z_9 = \dfrac{a_9 + a_1}{2}$).
Ceci se traduit par un système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}$$

mais de taille 9 sur 9.
Les données sont les z_k et les inconnues des a_k.
La matrice de taille 9 a aussi un déterminant non nul.
Le système a donc une unique solution.
Et je puis même vous indiquer la façon de la construire par « fausse position ».

En revanche en taille 10, le déterminant est nul.
Si les z_i sont mal choisis, il n'y a pas de solution.
Si ils sont bien choisis, il y en a une infinité.
Et on sait les construire.

Bref, l'exercice est loin d'être fini.
Et il illustre bien la notion de résolution de $M.U = B$: M inversible, une unique solution
M non inversible, B hors de l'image : pas de solution
B dans l'image : une infinité de solutions

Un v*en*dangeur m'a véh*i*culé. Il *sh*ootait en *pr*iant. Les f*ées* sont lég*ion* ! Le latiniste spécialiste de Cra*ssus* en*quète* beaucoup. Ils a des escarg*o*ts lents (translation). F*id*èles à Sion au présent (translation). La n*ausée* est r*usse*. J'ai *croqu*é bien des *gal*ettes. Les *ph*obies perturbent le*s* ames. A-t-on des *t*enues pour *c*até ? Des belles hô*t*esses en *F*rance *pa*ssent en montrant une belle as*su*rance. L'*a*rène pistée. Il n'a plus de foot, c'est pas un c*r*ado (translation) ! Les astronautes contrôlent l'*o*rbite quand ils v*eu*lent. Vous aimez les *ri*xes ? Plutôt *cé*der !

◦18◦

> Le corps est $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 5, noté $\mathbb{F}_5$.
> Montrez qu'il y 5 formes bilinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^2$.
> 5 formes trilinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^3$
> 625 formes bilinéaires sur $(\mathbb{F}_5)^2$
> 125 formes bilinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^3$
> 125 formes bilinéaires symétriques sur $(\mathbb{F}_5)^2$

Dans $(\mathbb{F}_5)^2$ il y a deux vecteurs de base, qu'on va noter $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ (c'est $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$).

Une forme bilinéaire antisymétrique est totalement déterminée par la donné de $\phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$.
C'est à dire par la donnée d'un nombre. Il y a cinq choix pour ce nombre (de 0 à 4).

De toutes façons, toutes les formes biinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^2$ sont des multiples du déterminant.
Et le choix du facteur « multiple de » laisse cinq possibilités.

L'idée est la même pour les trilinéaires antisymétriques.
Elles sont toutes des multiples du déterminant. Et il suffit de déterminer le nombre $\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ pour trouver ϕ.

Ah oui, j'ai posé $\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

On travaille sur $(\mathbb{F}_5)^2$. On a des couples de vecteurs de la forme $(a.\overrightarrow{i}+b.\overrightarrow{j},\ c.\overrightarrow{i}+d.\overrightarrow{j})$.
Par bilinéarité, une forme $\phi : (a.\overrightarrow{i}+b.\overrightarrow{j},\ c.\overrightarrow{i}+d.\overrightarrow{j}) \longmapsto \ldots$ est totalement déterminée si on se donne les quatre nombres

$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$
$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$

Il n'y a aucune hypothèse de symétrie ou d'antisymétrie permettant de regrouper ou simplifier.

Il y a $5\times 5\times 5\times 5$ choix de ce quadruplet. Ceci fait bien 625.

Dès lors, $\phi : (a.\overrightarrow{i}+b.\overrightarrow{j},\ c.\overrightarrow{i}+d.\overrightarrow{j}) \longmapsto a.b.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i})+b.c.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})+a.c.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})+b.d.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$ est totalement déterminée.

Sur $(\mathbb{F}_5)^3$ on va avoir beaucoup de formes bilinéaires.

On doit choisir

$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{i})$
$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$	$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{j})$
$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$	$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{k})$

.

Mais si la forme est antisymétrique, on n'a plus tant d'images à déterminer :

$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{i})$
$\ominus$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$	$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{j})$
$\ominus$	$\ominus$	$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{k})$

Ah, j'oubliais, antisymétrique implique alternée :

0	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{i})$
$\ominus$	0	$\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{j})$
$\ominus$	$\ominus$	0

Trois nombres à déterminer, 5^3 tableaux possibles.

Pour les bilinéaires symétriques sur $(\mathbb{F}_5)^2$,on doit choisir

$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$
$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$

Et par symétrie,

$\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$
	$\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$

suffit.

◦19◦ ♡ Résolvez $\overrightarrow{a}\wedge(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k})=(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k})$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{a}$.

Pour résoudre $\overrightarrow{a}\wedge(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k})=(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{k})$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{a}$, le plus simple est d'en venir à un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc|} & -y & -z & = & 1 \\ x & & +z & = & 1 \\ x & -y & & = & 2 \end{array}\right.$$

La première donne $y = 1-z$, la seconde donne $x = 1-z$ et la troisième confirme *(système compatible)*.

On trouve les solutions : $\boxed{S = \left\{ \begin{pmatrix} 1-z \\ 1-z \\ z \end{pmatrix} \mid z\in\mathbb{R}\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$ suivant la forme souhaitée *(description complète ou solution particulière plus homogènes)*.

Si vous avez rédigé en $\left\{\begin{array}{ccccc|} & -y & -z & = & 1 \\ x & & +z & = & 1 \\ x & -y & & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow (x = 1-z$ *et* $y = 1-z)$ *vous avez gardé vos réflexes de résolution par implication, et vous avez... perdu. En effet, on a tout aussi bien* $\left\{\begin{array}{ccccc|} & -y & -z & = & 1 \\ x & & +z & = & 1 \\ x & -y & & = & 43.\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow (x = 1-z$ *et* $y = 1-z)$ *puisque c'est juste une implication...*

◦20◦ $\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{k}$ n'a pas de sens si on ne met pas de parenthèses *(ainsi,* $(\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{j})\wedge(\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{k})$ *va en avoir)*. Combien de « valeurs » peut prendre ce vecteur suivant comment vous mettez les parenthèses ? *(base canonique)*

On peut mettre toutes les parenthèses que voici :

$\big((\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{j})\wedge\overrightarrow{i}\big)\wedge\overrightarrow{k}$	$\big(\overrightarrow{i}\wedge(\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{i})\big)\wedge\overrightarrow{k}$	$(\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{j})\wedge(\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{k})$	$\overrightarrow{i}\wedge\big((\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{i})\wedge\overrightarrow{k}\big)$	$\overrightarrow{i}\wedge\big(\overrightarrow{j}\wedge(\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{k})\big)$
$\big(\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{i}\big)\wedge\overrightarrow{k}$	$\big(\overrightarrow{i}\wedge(-\overrightarrow{k})\big)\wedge\overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{k}\wedge(-\overrightarrow{j})$	$\overrightarrow{i}\wedge\big((-\overrightarrow{k})\wedge\overrightarrow{k}\big)$	$\overrightarrow{i}\wedge\big(\overrightarrow{j}\wedge(-\overrightarrow{j})\big)$
$\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{0}$

Finalement, seulement deux vecteurs.

◦21◦

```
def truc(n) :
....A = []
....for i in range(n) :
........L = []
........for k in range(n) :
............L.append(abs(i-k))
........A.append(L)
....return A
```

Calculez le déterminant de `Truc(n)` pour n de 0 à 6.

On crée ligne à ligne une matrice, de terme général $|i-k|$ si i est l'indice de ligne et k celui de colonne *(certes, ça ne change rien, la matrice est symétrique)*.

Les premières matrices sont simples en rappelant que la matrice a vide a pour déterminant 1 :

0	1	2	3	4	5
$()$	$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
1	0	-1	4	-12	32

Et en taille 6, on trouve -80. Et les suivants, à la machine : 192, -448, 1024 et -2304.

$$\begin{vmatrix} 0&1&2&3&4\\ 1&0&1&2&3\\ 2&1&0&1&2\\ 3&2&1&0&1\\ 4&3&2&1&0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0&1&2&3&4\\ 1&0&1&2&3\\ 0&1&-2&-3&-4\\ 0&2&-2&-6&-8\\ 0&3&-2&-7&-12 \end{vmatrix} \begin{matrix} L0\\ L1\\ L2-2.L1\\ L3-3.L1\\ L4-4.L1 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1&2&3&4\\ 1&-2&-3&-4\\ 2&-2&-6&-8\\ 3&-2&-7&-12 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0&1&2&3&4\\ 1&0&1&2&3\\ 2&1&0&1&2\\ 3&2&1&0&1\\ 4&3&2&1&0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1&2&3&4\\ 2&0&0&0\\ 3&0&-3&-4\\ 4&0&-4&-8 \end{vmatrix} \begin{matrix} L0\\ L1+L0\\ L2+L0\\ L3+L0 \end{matrix} = +2. \begin{vmatrix} 2&3&4\\ 0&-3&-4\\ 0&-4&-8 \end{vmatrix} = 4. \begin{vmatrix} -3&-4\\ -4&-8 \end{vmatrix} = 32$$

Il n'y a pas de règle facile à deviner pour généraliser.

L'inflation irrite les *ma*bouls. La gau*ch*e au bou*l*ot. Je n'apprécie pas le *g*éant de taver*ne*. In*tr*us de Bel*g*ique. Les p*ro*fs gèlent dans les f*a*cs. L'*équ*ipe exalte les *p*opulations. L'abî*me* est dans le con*t*enu. Ce vétérinaire a *ann*ulé l'*enc*aisse. Difficile de *s'en* sortir si on *re*cule. Les footbaleurs ont montré leur f*or*ce dans le p*é*no.

◦22◦

♣ « Yes, well, the Governor of Kgovjni wants to give a very small dinner-party, and he means to ask his father's brother-in-law, his brother's father-in-law, his father-in-law's brother, and his brother-in-law's father ; and you're to guess how many guests there will be.»
«There is only one guest».
C'est du Lewis Carroll. Retrouvez le structure familiale du gouverneur pour que ces quatre dénominations recouvrent une seule et même personne.

Une année j'ai pris des notes sur la correction d'un élève.
Et j'ai perdu mes notes.

◦23◦

♡ L'élève Aissé-Sontencohr-Okupéh constate que les matrices suivantes ont pour déterminant 1 ou -1 et sont leur propre inverse :

$\begin{pmatrix} 1&1\\ 0&-1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&1&1\\ 0&-1&-2\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 0&-1&-2&-3\\ 0&0&1&3\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&-1&-2&-3&-4\\ 0&0&1&3&6\\ 0&0&0&-1&-4\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$

Prouvez le, y compris en taille 6.
Généralisez en donnant la forme du coefficient de ligne i colonne k et si possible en prouvant $M^2 = I_n$ *(là, ça devient ♠ ou ♣, on peut penser à l'application qui passe de* $a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + a_3.X^3 + \ldots + a_n.X^n$ *à* $a_0 + a_1.(1-X) + a_2.(1-X)^2 + a_3.(1-X)^3 + \ldots + a_n.(1-X)^n$ *et l'appliquer deux fois).*

Que ces matrices soient inversibles, c'est évident, à cause de leur déterminant égal à 1 ou -1.

Pour ce qui est d'être leur propre inverse, c'est aussi clair en calculant à chaque fois leur carré.

Maintenant, l'idée géniale. Qu'on va expliquer pour la dernière.

Si on nous donne un polynôme $P(X) = a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + a_3.X^3 + a_4.X^4$ on crée le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4 \end{pmatrix}$ (cinq lignes, on est dans $(\mathbb{R}_4[X], +, .)$, de dimension 5).

On construit ensuite l'application $P(X) \longmapsto P(1-X)$. Elle est linéaire.

L'objet sur lequel porte la linéarité, c'est $P(X)$ et on calcule donc $\phi(P(X) + Q(X))$ et $\phi(\lambda.P(X))$.

Déterminons l'image de $P(X)$ par cette application, puis mettons la sous forme vectorielle (sur la base canonique en fait !) :

$$\phi(P(X)) = a_0 + a_1.(1-X) + a_2.(1-X)^2 + a_3.(1-X)^3 + a_4.(1-X)^4$$

On développe par la formule du binôme et on regroupe suivant les puissances.
Le porc écrit

$$\phi(P(X)) = a_0+a_1+a_2+a_{''}+a_4-a_1.X-2.a_2.X-3.a_3.X-4.a_4.X+a_2.X^2+3.a_3.X^2+4.a_4.X^2-a_3.X^3-4.a_4.X^3+a_4.X^4$$

L'élève rigoureux écrit $\phi(P(X)) = \begin{array}{ccccc} (a_0 & +a_1 & +a_2 & +a_3 & +a_4) \\ - & (a_1 & +2.a_2 & +3.a_3 & +4.a_4).X \\ & + & (a_2 & +3.a_3 & +6.a_4).X^2 \\ & & - & (a_3 & +4.a_4).X^3 \\ & & & & +a_4.X^4 \end{array}$.

Et là, la forme matricielle de $\phi(P(X)))$ saute aux yeux, et on peut même introduire une matrice (pardon ! notre matrice)

$$\begin{pmatrix} a_0 & +a_1 & +a_2 & +a_3 & +a_4 \\ & -a_1 & +2.a_2 & -3.a_3 & -4.a_4 \\ & & a_2 & 3.a_3 & +6.a_4 \\ & & & -a_3 & -4.a_4 \\ & & & & +a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & -1 & +2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & +1 & +3 & +6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

En notation où on confond le polynôme avec sa représentation vectorielle : $\phi(P(X)) = M.P(X)$. Ou plus rigoureusement $V_{\phi(P(X))} = M.V_{P(X)}$ où $V_{P(X)}$ est la représentations dans $(\mathbb{R}^5, +, .)$ du polynôme de $(\mathbb{R}_4[X], +, .)$.

Alors qui sera M^2 ? Ce sera la matrice de $\phi \circ \phi$.

$$V_{\phi(\phi(P(X)))} = M.V_{\phi(P(X))} = M.(M.V_{P(X)})) = M^2.V_{P(X)}$$

Et dans le même temps, qui est $\phi \circ \phi$? C'est

$$P(X) \longmapsto P(1-X) \longmapsto P(1-(1-X))$$

Simplement : $\phi \circ \phi = Id_{\mathbb{R}_4[X]}$, et sa matrice est la matrice unité. On confrme : $M^2 = Id$.

∘24∘ ♡ a, b et c sont trois réels, montrez : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) \end{vmatrix} = \cos(b) - \cos(a)$ et

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) \end{vmatrix} = 2.(\cos(b)-\cos(a)).(\cos(c)-\cos(b)).(\cos(c)-\cos(a))$.

Avez vous une formule pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) & \cos(d) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) & \cos(2.d) \\ \cos(3.a) & \cos(3.b) & \cos(3.c) & \cos(3.d) \end{vmatrix}$? Et pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ch(a) & ch(b) & ch(c) \\ ch(2.a) & ch(2.b) & ch(2.c) \end{vmatrix}$

En taille 2, c'est facile.
En taille 3, on peut développer le déterminant en commençant par l'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(a) & \cos(b)-\cos(a) & \cos(c)-\cos(a) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b)-\cos(2.a) & \cos(2.c)-\cos(2.a) \end{vmatrix}$$

On écrit ensuite $\cos(2.b) - \cos(2.a) = 2.\cos^2(b) - 1 - (2.\cos^2(a) - 1) = 2.(\cos(b) - \cos(a)).(\cos(b) + \cos(a))$
On factorise alors le contenu des colonnes :

$$\begin{vmatrix} \cos(b)-\cos(a) & \cos(c)-\cos(a) \\ \cos(2.b)-\cos(2.a) & \cos(2.c)-\cos(2.a) \end{vmatrix} = 2.(\cos(b)-\cos(a)).(\cos(c)-\cos(a)). \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \cos(b)+\cos(a) & \cos(c)+\cos(a) \end{vmatrix}$$

On trouve bien la formule demandée.

Pour celle de taille 4, on effectue le même type de travail pour aboutir à

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b)-\cos(a) & \cos(c)-\cos(a) & \cos(d)-\cos(a) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b)-\cos(2.a) & \cos(2.c)-\cos(2.a) & \cos(2.d)-\cos(2.a) \\ \cos(3.a) & \cos(3.b)-\cos(3.a) & \cos(3.c)-\cos(3.a) & \cos(3.d)-\cos(3.a) \end{vmatrix}$$

On factorise de même, puis avec $\cos(3.b) - \cos(3.a) = 4.\cos^3(b) - 4.\cos^3(a) - 3.(\cos(b) - \cos(a))$
$\cos(3.b) - \cos(3.a) = (\cos(b) - \cos(a)).(4.(\cos^2(b) + \cos(a).\cos(b) + \cos^2(a) - 3)$

On arrive à $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(b)+\cos(a) & \cos(c)+\cos(a) & \cos(d)+\cos(a) \\ 4.(\cos^2(b)+\cos(a).\cos(b)+\cos^2(a)-3) & \dots & \dots \end{vmatrix}$
en facteur de $2.(\cos(b)-\cos(a)).(\cos(c)-\cos(a)).(\cos(d)-\cos(a))$.

On soustrait la première colonne aux autres

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(b)+\cos(a) & \cos(c)-\cos(b) & \cos(d)-\cos(b) \\ \dots & 4.\cos^2(c)-4.\cos^2(b)+4.(\cos(c)-\cos(b)).\cos(a) & \end{vmatrix}$$

A la fin, on a

$$8\times \begin{matrix} (\cos(d)-\cos(a)) & (\cos(c)-\cos(a)) & (\cos(b)-\cos(a)) \\ (\cos(d)-\cos(b)) & (\cos(c)-\cos(b)) & \\ (\cos(d)-\cos(c)) & & \end{matrix}$$

Il existe aussi une solution astucieuse avec les déterminants de VanDerMonde et les polynômes de Tchebychev..

Avec les cosinus hyperboliques, le résultat est le même.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ch(a) & ch(b) & ch(c) \\ ch(2.a) & ch(2.b) & ch(2.c) \end{vmatrix} = 2.(ch(b)-ch(a)).(ch(c)-ch(a)).(ch(c)-ch(b))$$

Et le coup des polynômes de Tchebychev ?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) & \cos(d) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) & \cos(2.d) \\ \cos(3.a) & \cos(3.b) & \cos(3.c) & \cos(3.d) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ 2.x^2-1 & 2.y^2-1 & 2.z^2-1 & 2.t^2-1 \\ 4.x^3-3.x & 4.y^3-3.y & 4.z^3-3.z & 4.z^3-3.z \end{vmatrix}$$

avec des notations que j'espère claires.

On soustrait en lignes : $L_2 \leftarrow L_2+L_0$ et $L_3 \leftarrow L_3+3.L_1$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ 2.x^2 & 2.y^2 & 2.z^2 & 2.t^2 \\ 4.x^3 & 4.y^3 & 4.z^3 & 4.z^3 \end{vmatrix}$

Il ne reste qu'à sortir les 2 et les 4 et on a un déterminant de VanDerMonde.
On a donc 8 fois le produit des différences de cosinus.

∘25∘

Est il possible qu'une phrase soit vraie dans ce que j'ai écrit dans ce cadre ?

Dans ce cadre, exactement une phrase est vraie.
Dans ce cadre, exactement une phrase est fausse.
Dans ce cadre, exactement deux phrases sont vraies.
Dans ce cadre, exactement deux phrases sont fausses.

∘26∘

♡ Déterminez $Com(Com(A))$ si A est une matrice carrée de taille 2.
Déterminez $Com(Com(A))$ si A est une matrice carrée inversible de taille n.
Montrez que si A une matrice de taille 3 non inversible, alors $Com(Com(A))$ est la matrice nulle.

En taille 2 : $Com(Com(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})) = Com(\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
On a $Com(Com(A)) = A$.

Pour A inversible, on a $A^{-1} = \dfrac{{}^tCom(A)}{\det(A)}$.
Mais alors $Com(A)$ est à son tour inversible : ${}^t(Com(A)) = \det(A).A^{-1}$
$\det({}^t(Com(A))) = (\det(A))^n.\det(A^{-1})$
$\det({}^t(Com(A))) = (\det(A))^{n-1}$ non nul
On inverse $Com(A)$ par la formule : $Com(A))^{-1} = \dfrac{{}^tCom(Com(A))}{\det(Com(A))}$ et donc ${}^tCom(Com(A)) = (\det(Com(A))).Com(A))^{-1}$.
Mais la relation $A.{}^tCom(A) = \det(A).I_n$ donne aussi une forme rapide et directe de l'inverse de $Com(A)$:

$$(Com(A))^{-1} = \frac{{}^tA}{\det(A)}$$

En comparant les deux formules : $\dfrac{{}^tA}{d} = \dfrac{{}^t(Com(Com(A))}{d^{n-1}}$ et donc $\boxed{Com(Com(M)) = d^{n-2}.A}$
Et pour n égal à 2, c'est cohérent...

∘27∘ Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Même question avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice de comatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$?
Existe-t-il une matrice de comatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?
Existe-t-il une matrice de comatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ avec la définition.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ facile (même sans être inversible).
Et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la comatrice de $\dfrac{1}{\sqrt{3}}.\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Prenons les trois vecteurs

$$\overrightarrow{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{c} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculons les trois produits vectoriels.
On a ce qu'on voulait.

∘28∘ ♡ Montrez que l'équation d'un cercle du plan est de la forme $x^2 + y^2 - 2.\alpha.x - 2.\beta.y + \gamma = 0$.
Montrez néanmoins que $x^2 + y^2 - 2.x - 4.y + 7 = 0$ n'est pas une équation de cercle.
Montrez que $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a^2+\alpha^2 & a & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ est l'équation du cercle passant par $A(a, \alpha)$, $B(b, \beta)$ et $C(c, \gamma)$ *(surtout ne développez pas, on est en maths ! pensez à prouver que c'est la forme d'une équation de cercle, et trouvez trois points évidents)*. Donnez l'équation et le centre du cercle passant par $A(1, 1)$, $B(2, 5)$ et $C(4, 12)$.
Donnez l'équation et le centre de la sphère de $\mathbb{R}^3$ passant par $A(1, 1, 0)$, $B(2, 5, 0)$ et $C(4, 12, 0)$ et $D(0, 0, 1)$.

L'équation duu cercle de centre $C(a,\ b)$ et de rayon R est $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$.
On la développe en $x^2 + y^2 - 2.\alpha.x - 2.\beta.y + \gamma = 0$ avec $\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$.

Si les coefficients sont mal choisis : $x^2 + y^2 - 2.x - 4.y + 7 = 0$
$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 7 = 0$
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = -2$
Ce qu'il reste n'est pas un carré de rayon. Le cercle est « imaginaire ».

$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a^2+\alpha^2 & a & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ se développe sous la forme

$$(x^2+y^2).\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} - x.\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} + y.\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & \alpha \\ b^2+\beta^2 & b & \beta \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

On a la forme $(x^2+y^2) - 2.A.x - 2.B.y + C = 0$ en posant

$A = \dfrac{\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix}}{2.\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix}}$	$B = -\dfrac{\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & 1 \end{vmatrix}}{2.\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix}}$	$C = \dfrac{\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & \alpha \\ b^2+\beta^2 & b & \beta \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma \end{vmatrix}}{2.\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix}}$

sous réserve que le dénominateur soit non nul (on en recause plus loin si nécessaire).

C'est bien la forme d'une équation de cercle.

Ensuite, $\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & \alpha & 1 \\ a^2+\alpha^2 & a & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ car il y a deux lignes égales.
Ce cercle contient le points A.
De même, avec « $L_1 = L_3$ », il contient le point B.
Et le point C.

Or, par A, B et C passe un cercle et un seul.
C'est donc LE cercle passant par A, B et C.

Tout ça sans se prendre la tête à déterminer son centre par trente équations comme le ferait un élève malformé par le système « éducatif » pré-bac.

Pour $A(1,1)$, $B(2,5)$ et $C(4,12)$, l'équation est

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 29 & 2 & 5 & 1 \\ 160 & 4 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

et on développe en

$$x^2+y^2-335.x+77.y+256$$

On peut ainsi retrouver les coordonnées du centre $\left(\dfrac{335}{2}, \dfrac{-77}{2}\right)$ et un petit calcul donne le rayon[3].

Et pour la sphère, le raisonnement est le même : $\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ a^2+a'^2+a''^2 & a & a' & a'' & 1 \\ b^2+b'^2+b''^2 & b & b' & b'' & 1 \\ c^2+c'^2+c''^2 & c & c' & c'' & 1 \end{vmatrix} = 0$
est l'équation d'une sphère (forme développée $(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2 = R^2$).
Et elle est valable pour A, pour B, pour C et pour D. C'est LA sphère passant par A, B, C et D.

Ah oui, j'ai promis de traiter à part le cas $\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ dans l'équation

$$(x^2+y^2).\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} - x.\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} + y.\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & \alpha \\ b^2+\beta^2 & b & \beta \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

C'est alors l'équation d'une droite.
Mais cette droite passe quand même par A, B et c puisque ces trois couples de composantes vérifient l'équation.
Et c'est louche une droite passant par trois points imposés.
A moins que ces points ne soient déjà alignés, auquel cas la question « équation du cercle » perd son sens...

On notera que $\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ équivaut à $\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b-a & \beta-\alpha & 0 \\ c-a & \gamma-\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0$ puis $\begin{vmatrix} b-a & \beta-\alpha \\ c-a & \gamma-\gamma \end{vmatrix} = 0$.
On reconnaît « $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ».
Comme quoi tout se tient...

∘29∘ ♡ Déterminant de Menger. Montrez que $\begin{vmatrix} AB^2 & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} & AC^2 \end{vmatrix}/4$ est le carré de l'aire du triangle *(indication :* $\det(M.{}^tM)$*)*.

L'aire du parallélogramme est un déterminant. Avec des vecteurs colonne $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

L'aire du triangle en est la moitié : $Triangle = \dfrac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$.

3. moi je dirais « mesure juste la distance de A au centre que tu viens de trouver

Mais on peut aussi le transposer sans changer sa valeur $Triangle = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$.

On multiplie les deux : $Triangle^2 = \frac{1}{4}.\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$.

Et le déterminant du produit est le produit des déterminants :

$4.Triangle^2$ est le déterminant de $\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix}$.

Et les quatre coefficients de cette matrice sont $\begin{pmatrix} |AB|^2 & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} & |AC|^2 \end{pmatrix}$, avec les règles de calcul des normes $\sqrt{x^2+y^2}$ et des produits scalaires $x.x' + y.y'$.

∘30∘ ♡ Un triangle du plan a pour sommets A, B et C de coordonnées $(a',\ a'')$, $(b',\ b'')$ et $(c',\ c'')$. L'aire du triangle est notée S. Montrez $2.S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a' & a'' \\ 1 & b' & b'' \\ 1 & c' & c'' \end{vmatrix}$.

Le cours nous indique déjà : $2.S = \det_C(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})$. Avec des coordonnées : $2.S = \begin{vmatrix} b' - a' & c' - a' \\ b'' - a'' & c'' - a'' \end{vmatrix}$.

Un déterminant nous est donné qu'on arrange par combinaisons du type $C_k \leftarrow C_k - C_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a' & b' - a' & c' - a' \\ a'' & b'' - a' & c'' - a'' \end{vmatrix}$$

On développe ce déterminant par rapport à la première ligne, et on retrouve $2.S$ comme promis.

Et c'est aussi $\begin{vmatrix} 1 & a' & a'' \\ 1 & b' & b'' \\ 1 & c' & c'' \end{vmatrix}$ car une matrice et sa transposée ont le même déterminant.

Déduisez : $4.S^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 + a'^2 + a''^2 & 1 + a'.b' + a''.b'' & 1 + a'.c' + a''.c'' \\ 0 & 1 + a'.b' + a''.b'' & 1 + b'^2 + b''^2 & 1 + b'.c' + b''.c'' \\ 0 & 1 + a'.c' + a''.c'' & 1 + b'.c' + b''.c'' & 1 + c'^2 + c''^2 \end{vmatrix}$

Cette question n'était pas juste là pour que vous fassiez appel à $\det({}^tM) = \det(M)$. *C'est une piste.*

On calcule $4.S^2 = 2.S.2.S = \begin{vmatrix} 1 & a' & a'' \\ 1 & b' & b'' \\ 1 & c' & c'' \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$, voilà l'idée.

Or, le déterminant du produit est le produit est le produit des déterminants :

$$4.S^2 = \begin{vmatrix} 1 + a'^2 + a''^2 & 1 + a'.b' + a''.b'' & 1 + a'.c' + a''.c'' \\ 1 + a'.b' + a''.b'' & 1 + b'^2 + b''^2 & 1 + b'.c' + b''.c'' \\ 1 + a'.c' + a''.c'' & 1 + b'.c' + b''.c'' & 1 + c'^2 + c''^2 \end{vmatrix}$$

Quand on développe le déterminant proposé

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 + a'^2 + a''^2 & 1 + a'.b' + a''.b'' & 1 + a'.c' + a''.c'' \\ 0 & 1 + a'.b' + a''.b'' & 1 + b'^2 + b''^2 & 1 + b'.c' + b''.c'' \\ 0 & 1 + a'.c' + a''.c'' & 1 + b'.c' + b''.c'' & 1 + c'^2 + c''^2 \end{vmatrix}$$

par rapport à sa première colonne donne celui de l'énoncé.

Il était possible évidemment d'aboutir au même résultat par de laborieux calculs et développement complet de toutes les formules. C'était bien moins intelligent, mais ça rapportait tous les points. Et ça faisait passer le temps...

$$\text{puis } -4.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ 1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ 1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$$

On part du déterminant proposé et on le travaille par combinaisons en lignes et en colonnes. On soustrait la première ligne aux autres :

$$4.S^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ -1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ -1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$$

Ca ne ressemble pas encore au déterminant demandé. Il manque le 0 en haut. Et il manque le signe moins.
Pour le signe moins, la multilinéarité le donne :

$$-4.S^2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ 1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ 1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$$

Il y a cette fois un -1 en haut.
Mais quel est son cofacteur ? C'est $\begin{vmatrix} a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$
Si celui ci est nul, les deux déterminants
$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ 1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ 1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ 1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ 1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$ seront égaux.
Il suffit pour celà de prouver que ces colonnes sont coplanaires.
Or, ce sont toutes trois des combinaisons de deux colonnes élémentaires :

$\begin{pmatrix} a'^2+a''^2 \\ a'.b'+a''.b'' \\ a'.c'+a''.c'' \end{pmatrix} = a'.\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} + a''.\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a'.b'+a''.b'' \\ b'^2+b''^2 \\ b'.c'+b''.c'' \end{pmatrix} = b'.\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} + b''.\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a'.c'+a''.c'' \\ b'.c'+b''.c'' \\ c'^2+c''^2 \end{pmatrix} = c'.\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} + c''.\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$	

Trois vecteurs dans le plan engendré par $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$, leur déterminant est bien nul.

$$\text{et } -16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2.a'^2-2.a''^2 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.a'.c'-2.a''.c'' \\ 1 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.b'^2-2.b''^2 & -2.b'.c'-2.b''.c'' \\ 1 & -2.a'.c'-2.a''.c'' & -2.b'.c'-2.b''.c'' & -2.c'^2-2.c''^2 \end{vmatrix}$$

On repart de $-4.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ 1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ 1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$ et multiplie par -8 (je sais on aurait voulu tout multiplier par 4, mais on va bien voir) ; ceci revient à multiplier trois colonnes par -2 :

$$8.4.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2.a'^2-2.a''^2 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.a'.c'-2.a''.c'' \\ 1 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.b'^2-2.b''^2 & -2.b'.c'-2.b''.c'' \\ 1 & -2.a'.c'-2.a''.c'' & -2.b'.c'-2.b''.c'' & -2.c'^2-2.c''^2 \end{vmatrix}$$

On a les bons "double produits", mais on a des -2 en trop sur la premeière ligne. Alors on sort un facteur -2 de la première ligne :

$$8.4.S^2 = -2.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2.a'^2 - 2.a''^2 & -2.a'.b' - 2.a''.b'' & -2.a'.c' - 2.a''.c'' \\ 1 & -2.a'.b' - 2.a''.b'' & -2.b'^2 - 2.b''^2 & -2.b'.c' - 2.b''.c'' \\ 1 & -2.a'.c' - 2.a''.c'' & -2.b'.c' - 2.b''.c'' & -2.c'^2 - 2.c''^2 \end{vmatrix}$$

Le facteur -2 en trop s'en va, c'est fini, on a la formule de l'énoncé.

Peu de gens savent par exemple qu'on a $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & -\beta' & -\gamma' \\ \alpha'' & -\beta'' & -\gamma'' \end{vmatrix}$*. Mais je n'irai pas prétendre que ce soit un grand avantage pour vous de le savoir.*

et enfin $-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 \end{vmatrix}$ *(déterminant de Cayley-Menger* [a]*).*

a. Karl Menger mathématicien du vingtième siècle né à Vienne mais devenu américain en 1937, connu pour son "éponge" fractale, de volume nul et d'aire infinie

On a nos doubles produits. Il nous faut des termes en $(a' - b')^2 + (a'' - b'')^2$. On va utiliser la première colonne et la première ligne pour les avoir. On ajoute $(a'^2 + a''^2).C_1$ à la colonne C_2 :

$$-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a'^2 - a''^2 & -2.a'.b' - 2.a''.b'' & -2.a'.c' - 2.a''.c'' \\ 1 & a'^2 - 2.a'.b' - 2.a''.b'' + a''^2 & -2.b'^2 - 2.b''^2 & -2.b'.c' - 2.b''.c'' \\ 1 & a'^2 - 2.a'.c' - 2.a''.c'' + a''^2 & -2.b'.c' - 2.b''.c'' & -2.c'^2 - 2.c''^2 \end{vmatrix}$$

On ajoute ensuite $(b'^2 + b''^2).C_1$ sur la colonne C_3 et ce dont on se doute sur la colonne C_4 :

$$-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a'^2 - a''^2 & b'^2 - 2.a'.b' - 2.a''.b'' + b''^2 & c'^2 - 2.a'.c' - 2.a''.c'' + c''^2 \\ 1 & a'^2 - 2.a'.b' - 2.a''.b'' + a''^2 & -b'^2 - b''^2 & c'^2 - 2.b'.c' - 2.b''.c'' + c''^2 \\ 1 & a'^2 - 2.a'.c' - 2.a''.c'' + a''^2 & b'^2 - 2.b'.c' - 2.b''.c'' + b''^2 & -c'^2 - c''^2 \end{vmatrix}$$

On est en bon chemin, il manque encore des termes pour nos identités remarquables en

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (a'^2 - 2.a'.b' + b'^2) + (a''^2 - 2.a''.b'' + b''^2)$$

et pour avoir des 0 sur la diagonale. On travaille en ligne : $L_2 \leftarrow L_2 + (a'^2 + a''^2).L_1$:

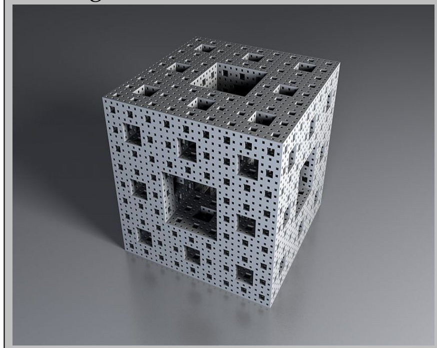
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b'^2 - 2.a'.b' + a'^2 + a''^2 - 2.a''.b'' + b''^2 & c'^2 - 2.a'.c' + a'^2 + a''^2 - 2.a''.c'' + c''^2 \\ 1 & a'^2 - 2.a'.b' - 2.a''.b'' + a''^2 & -b'^2 - b''^2 & c'^2 - 2.b'.c' - 2.b''.c'' + c''^2 \\ 1 & a'^2 - 2.a'.c' - 2.a''.c'' + a''^2 & b'^2 - 2.b'.c' - 2.b''.c'' + b''^2 & -c'^2 - c''^2 \end{vmatrix}$$

On élimine encore sur les autres lignes et on a enfin ces carrés de normes attendus :

$$-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Moralité : si on connaît juste les trois longueurs et aucun angle, on peut quand même calculer l'aire. Et on a la formule similaire en dimension n.

Retrouvez la formule dite de Heron[a] : $S = \sqrt{\dfrac{(a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)}{16}}$ où a, b et c désignent les longueurs des trois côtés du triangle.



a. Heron d'Alexandrie, premier siècle, mathématicien grec, auteur de nombreux livres et d'astucieux systèmes mécaniques

Oui, c'est le même Heron que dans la formule de Euclide et Héron, généralisation du théorème de Pythagore avec un angle non droit : $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(\gamma)$ *appelée aussi formule d'Al-Kashi.*

On note a, b et c les trois longueurs des côtés pour simplifier et faire comme tout le monde :

$-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$ On développe par rapport à une colonne :

$$-16.S^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c^2 & b^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \end{vmatrix}$$

et on recommence, regroupe : $\boxed{16.S^2 = 2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 + 2.b^2.c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$

On sent venir les formules de Viète, et pourtant...

Pour établir la formule de Heron, il suffit de comparer la somme $2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 + 2.b^2.c^2 - a^4 - b^4 - c^4$ et le produit $(a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$.

Connaissant Simon F., je me doute qu'il va juste écrire "*on développe le membre de droite et on retrouve celui de gauche*".

Mais il faut prouver que vous l'avez fait. Et que vous l'avez fait intelligemment :

$(a+b+c).(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2$	$(c+b-a).(c+a-b) = c^2 - (a-b)^2$

On développe pour finir le produit de ces deux termes :

$(a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b) = -c^4 - (a+b)^2.(a-b)^2 + c^2.((a+b)^2 + (a-b)^2)$

On a le terme $-c^4$.

Le produit $(a+b)^2.(a-b)^2$ vaut $(a^2-b^2)^2$ et apporte a^4, b^4et $2.a^2.b^2$ avec les bons signes.

Il reste $c^2.((a+b)^2 + (a-b)^2)$ de valeur $c^2.(2.a^2 + 2.b^2)$ et on a les derniers double produits.

On a donc sans gros effort

$$\boxed{2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 + 2.b^2.c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = (a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)}$$

On reporte, et on a la formule de Heron $S = \sqrt{\dfrac{(a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)}{16}}$ plus connue sous la forme $\boxed{S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}}$ où p est le demi-périmètre $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

♣ 0 ♣

Pour un tétraèdre de $\mathbb{R}^3$, la formule est $288.V^3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 & AD^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 & BD^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 & CD^2 \\ 1 & AD^2 & BD^2 & CD^2 & 0 \end{vmatrix}$ *(dite formule de Piero della Francesca*[a]*)*. Prouvez la.

a. XV^{eme}siècle, mathématicien italien (oui, avec ce nom) qui formalisa la notion de perspective et volumes dans $\mathbb{R}^3$ et reste d'ailleurs connu comme peintre

Même type de calculs.

∘31∘ Donnez le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et montrez que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres (valeur propre ?). Donnez un dernier vecteur propre, formant une base de $(\mathbb{R}^4, +, .)$ avec des trois autres (on supposera $a+b+c+d$ non nul).

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \\ d & d & d & d \end{pmatrix}$$

c'est bien une matrice carrée.
Le déterminant de $M - X.I_4$ donne $X^4 - (a+b+c+d).X^3$ si on fait le calcul.

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \\ d & d & d & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} .(a+b+c+d)$$

C'est une formule du type $M.U = \lambda.U$ avec $\lambda = a+b+c+d$ (la valeur propre)

et $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ (le vecteur propre, non nul)

De même $\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \\ d & d & d & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} .(0).$

On a un vecteur propre (non nul) et c'est la valeur propre qui est nulle *(ça c'est autorisé)*.

Remarque :	*Un vecteur propre est non nul, sinon $M.0_n = \lambda.0_n$ est sans intérêt.* *La valeur propre λ associée au vecteur propre a le droit d'être nulle.* *Et d'ailleurs, le cas « il y a une valeur propre nulle » est le cas où on peut avoir à la fois* *M non inversible* *M diagonalisable* *Pourquoi confondez vous inversibilité et diagonalisabilité.* *Inversibilité, c'est facile, on calcule un déterminant.* *Diagonalisabilité nécessite de trouver D et P, c'est plus « chaud ».*

On écrit nos couples

valeur propre	$a+b+c+d$	0	0	0
vecteur propre	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

On en déduit

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & -1 & 0 & 0 \\ c & 0 & -1 & 0 \\ d & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Et si ! D est diagonale : $D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ si vraiment vous n'avez pas les trous en face de yeux.

∘32∘ J'ai tracé un quadrilatère (A, B, C, D) dans le plan. J'ai mesuré ses quatre côtés et une de ses diagonales. J'ai trouvé les mesures suivantes, triées par ordre croissant :

4	8	11	20	30

Dites moi laquelle est la longueur d'une des diagonales *(et prouvez le)*.

Indiquez comment retrouver alors la longueur de l'autre diagonale. Combien de valeurs peut prendre cette longueur de l'autre diagonale ?

Point de départ de cet exercice : si on a un triangle, on mesure les longueurs des côtés ; mais si on a les longueurs des côtés, on n'a pas forcément un triangle.

Par exemple, il est impossible d'avoir un triangle (A, B, C) *vérifiant* $AB = 1$, $BC = 2$ *et* $AC = 15$, *on est d'accord.*
Or, un quadrilatère dont on a tracé une des diagonales est fait de deux triangles accolés. Il y a donc des relations entre les cinq longueurs données.
Alors, quelles sont les conditions sur les trois longueurs d'un triangle ?
On considéré un triangle de sommets A, B et C et de côtés a, b et c *(notation canonique : $AB = c$ et ainsi de suite)*. Quitte à ordonner, on suppose $a \leqslant b \leqslant c$. On a trois inégalités triangulaires à écrire et manipuler *(sachant $a \leqslant b \leqslant c$)* :

$AB \leqslant AC + BC$	$c \leqslant a + b$	$c - b \leqslant a$	formule 1
$AC \leqslant AB + BC$	$a \leqslant b + c$	peu utile	
$BC \leqslant AB + AC$	$b \leqslant a + c$	$b - a \leqslant c$	formule 2

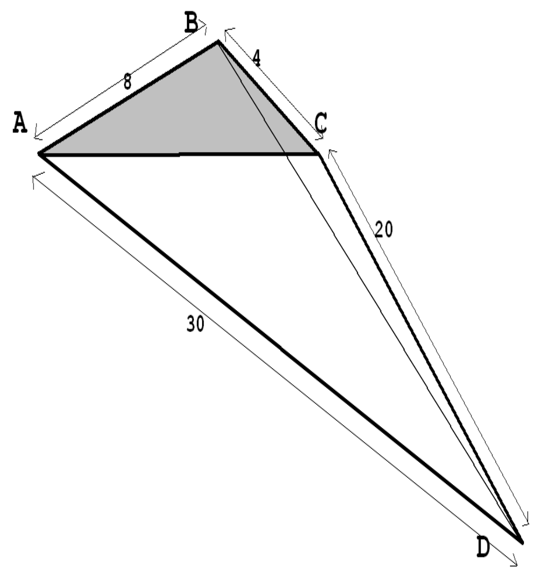
Quitte maintenant à choisir le nom des quatre sommets du quadrilatère, on les nomme dans l'ordre A, B, C et D, et on considère que la diagonale mesurée est AC.
La question est : de 4 8 11 20 30, qui est AC ? On raisonne en étudiant chaque cas, un par un. On élimine ceux qui sont incohérents, et s'il n'en reste qu'un, c'est le bon.

On suppose $AC = 4$. On a alors deux triangles (ABC) et (ACD) dont le plus petit côté vaut 4. La formule (1) nous dit que la différence des deux autres cotés ne peut pas dépasser 4. C'est possible avec un triangle de mesures $(4, 8, 11)$, mais on n'a plus de possibilités pour l'autre : $(4,\ 20,\ 35)$ n'est pas cohérent.
On élimine $AC = 4$.

• On suppose $AC = 8$. Là encore, il faut deux couples de côtés dont la différence ne dépasse pas 8. C'est encore possible avec $(4,\ 8,\ 11)$ mais pas avec $(8,\ 20,\ 30)$ *(et je ne parle pas des $(4,\ 8,\ 20)$ et autres)*.
On élimine $AC = 4$.

• On suppose $AC = 11$. On peut assembler un triangle $(4, 8, 11)$ et un triangle $(11, 20, 30)$. Il n'y a aucune incohérence.
On peut garder $AC = 11$.

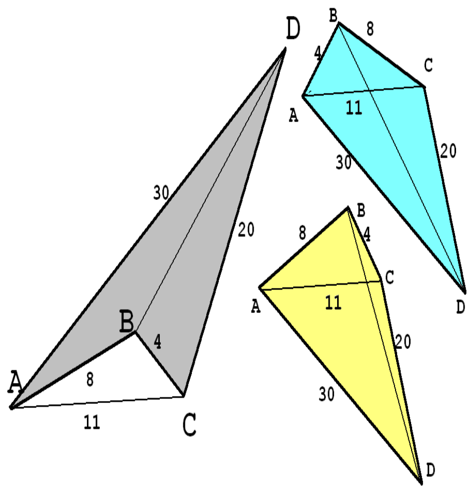
• On suppose $AC = 20$ *(une grande diagonale !)*. Les côtés du quadrilatère valent 4, 8, 11 et 30. On a donc deux triangles dont un côté vaut 20. L'un d'entre eux est de la forme $(x, 20, 30)$, et l'autre prend les deux longueurs qui restent. Mais, qu'il s'agisse de $(11,\ 8,\ 20)$, $(4,\ 8,\ 20)$, $(4,\ 11,\ 20)$ c'est incohérent.
On élimine $AC = 20$.



• On suppose $AC = 30$. C'est encore pire. Comment pouvez vous alors avoir deux triangles de grand côté 30, avec les longueurs 4, 8, 11 et 20 ? Déjà, $4 + 8 + 11 + 20$ n'atteint pas 60.

Bref, $\boxed{\text{par élimination, il ne reste que } AC = 11}$
L'un des côtés du quadrilatère vaut 30. Il faut donc avec un côté de longueur au moins $30 - 11$. La seule solution est donc 20.
Les deux derniers côtés sont 4 et 8.
On a deux solutions *(à symétrie et rotation près)* :

$AB = 8$	$BC = 4$	$CD = 20$	$DA = 30$
$AB = 4$	$BC = 8$	$CD = 20$	$DA = 30$



On va chercher à mesurer l'autre diagonale dans le premier cas. Mais il y a l'autre cas.
On choisit un repère associé à notre problème, comme toujours en géométrie cartésienne.
On place l'origine en A qui a alors pour coordonnées $(0, 0)$.
On oriente l'axe Ox pour que C soit dessus : $C(11,\ 0)$.
On doit alors placer B à distance 8 de A ($x^2 + y^2 = 64$) et à distance 4 de C ($(x-11)^2 + y^2 = 16$). On résout et on choisit l'orientation de Oy pour que y_B soit positif : $B\Big(\dfrac{169}{22},\ \dfrac{22.\sqrt{2415}}{484}\Big)$.
On fait de même pour placer D : $x^2 + y^2 = 900$, $(x-11)^2 + y^2 = 400$: $D\Big(\dfrac{621}{22},\ \dfrac{66.\sqrt{5551}}{484}\Big)$.

Il ne reste plus qu'à calculer la distance BC *(application numérique totalement inutile :* $\sqrt{\dfrac{128\,339 + 21.\sqrt{273\,585}}{}}$ *soit environ 24)*.
Mais il y a d'autres solutions $\boxed{\text{quatre quadrilatères dont deux convexes}}$ en changeant des signes...

∘33∘ (♡ en dimension 2 ou 3) En considérant que la base canonique de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ est de la forme $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right)$ (on promène les 1 le long de chaque ligne dans l'ordre) ;
la base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right)$ est elle de même orientation qu'elle (cette fois, les 1 se promènent de colonne en colonne) ?
Rappel : pour dire si deux bases B et $\mathbb{B}$ ont la même orientation, on exprime les vecteurs de B sur la base $\mathbb{B}$ et on regarde le signe du déterminant obtenu.

Il faut donc écrire en colonne la matrice qui exprime les vecteurs de la nouvelle base par rapport à ceux de l'ancienne base.
Et attention, les vecteurs sont eux même des matrices...
Par exemple, pour n égal à 2 *(je ne commence pas par* 0 *ou* 1*)* :

1	0	0	0	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^*$
0	0	0	0	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^*$
0	1	0	0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^*$
0	0	0	1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^*$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	

La matrice de changement de base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et elle a pour déterminant -1.

Passons à la taille 3 :

1	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	
0	1	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	1	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	1	
0	0	1	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	1	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	

Si j'ai bien rempli, il y a dans la matrice de taille 9 sur 9 un seul 1 par ligne et par colonne.
C'est une matrice de permutation.
Pour trouver sa signature, il suffit de compter les échanges de colonnes.
Et finalement, il suffit de compter des bicycles :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y en a trois, la signature vaut -1, et le déterminant aussi.
Les deux bases sont orientées en sens contraire.

Pour n quelconque, il a a n matrices qui sont à la même place dans les deux descriptions *(celles où le* 1 *est sur la diagonale)*.
Il reste $n^2 - n$ éléments qui s'échangent deux à deux.
On a besoin de $\dfrac{n.(n-1)}{2}$ bicycles.
La signature vaut $\boxed{(-1)^{\frac{n.(n-1)}{2}}}$ *(et c'est aussi le déterminant du changement de base)*.

◦34◦ Écrivez un script Python qui prend en entrée n et crée la matrice de taille n sur n "du laboureur", dont voici les premières $L_0 = ()$, $L_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$,
$L_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \to & \to & \to & \to & \curvearrowright \\ \curvearrowleft & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \hookleftarrow \\ \hookrightarrow & \to & \to & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}$
Calculez son déterminant en fonction de n.

On crée la matrice comme liste de listes. La première ligne est `range(1, n+1)`.
La suivante est `range(n+1, 2.n+1)`, mais en sens inverse.
La suivante est `range(2.n+1, 3.n+1)` dans le bon sens :

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \to & n \\ 2.n & 2.n-1 & 2.n-2 & \leftarrow & n+1 \\ 2.n+1 & 2.n+2 & 2.n+3 & \to & \end{matrix}$$

et ainsi de suite.
Dans la ligne d'indice `i` (indice `Python`) on a les termes de `n.i+1` à `n.(i+1)`. Mais le sens de remplissage de la ligne

dépend de la parité de `i`.

On peut proposer :

```
def Laboureur(n) :
....M = [ ]
....for i in range(n) : #les lignes
........L = list(range(n*i+1, n*(i+1)+1) #gare aux indices
........if i%2==1 : #suivant la parité de i
............L.reverse( ) #on la renverse
........M.append(L) #la ligne est validée
....return M #la matrice est finie
```

Il y a d'autres solutions, en remplissant directement puis en retournant une ligne sur deux

```
....M = [[i*n+k+1 for k in range(n)] for i in range(n)]
....for i in range(1, n, 2) : #on génère les indices impairs
........M[i].reverse( )
```

On peut aussi explorer un `index in range(1, n*n+1)` pour avoir tous les termes de la liste, puis compléter les lignes une par une en append si `i%n` est pair ou en append au début si `i%n` impair.

```
....M = [ ]
....L = [ ]
....for index in range(1, n*n+1) : #on va tout parcourir
........if (index/n)%2 == 0 : #sur quelle ligne est on ?
............L = L+[index] #ligne paire, le laboureur avance vers la droite
........else :
............L = [index]+L #ligne impaire, il avance vers la gauche
........if index%n == 0 : #est en en bout de ligne ?
............M.append(L) #on colle la ligne
............L = [ ] #on remet la ligne à zéro
```

Pour le calcul du déterminant, il y a les premiers. Mais à partir d'un certain rang, tout devient facile.
Dès qu'il y a plus de quatre lignes, on peut remplacer L_1 par $L_1 - L_0$ et L_3 par $L_3 - L_2$. On a tout de suite deux lignes égales, le déterminant est nul.
Pour saisir :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} = 0$$

$L_0 = ()$	$L_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$	$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$	
1	1	-3	0	0	etc

On peut aussi, dès la taille 3 remplacer L_2 par $L_2 - L_1$ et retrouver L_0. Même $\det(L_3)$ est nul.

◦35◦ Résolvez $(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

Est ce si déplorable de poser trois composantes et de résoudre

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient $\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

puis

$$\begin{pmatrix} -y^2 - z^2 \\ x.y \\ z.x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient trois équations : $y^2 + z^2 - z = 0$, $x.y = 0$ et $x.(z-1) + 1 = 0$.
Celle du milieu donne deux chemins : $x = 0$ ou $y = 0$.

Mais $x = 0$ est incompatible dans la dernière.
On a donc cette fois $z^2 - z = 0$, $y = 0$ et $x.(z-1) + 1 = 0$.
z vaut 0 ou 1. Mais $z = 1$ est impossible dans la dernière.

On a l'unique solution : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c'est $\overrightarrow{i}$).

On vérifie

$$(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i}) \wedge \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0} - \overrightarrow{k} + \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$$

∘36∘ On veut résoudre le système différentiel $\begin{pmatrix} u'_t \\ v'_t \\ w'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix}$ d'inconnues u, v et w fonctions de t. On pose $m = u^2 + v^2 + w^2$. Montrez : $m' = 0$. Déduisez que les solutions du système sont bornées.
Écrivez le système sous le $\Omega \wedge U_t = U'_t$ même si ça ne sert à rien pour l'instant.
Diagonalisez la matrice dans le cas $(a, b, c) = (3, 4, 12)$.
Résolvez alors le système différentiel pour $(u_0,\ v_{0,}\ w_0)$ donné.

On dérive : $m' = 2.u.u' + 2.v.v' + 2.w.w'$.
On remplace : $' = 2.\Big((a.v - b.w).u + (-a.u + c.w).v + (b.u - c.v).w\Big)$.
Tous les termes s'en vont.
$'$ est nulle sur l'intervalle d'étude (au féminin, c'est une application).
m est conc constante.

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & a.v & -b.w \\ -a.u & & +c.w \\ b.u & -c.v & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -b \\ -a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Ce croisement entre matrice antisymétrique $\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ et produit vectoriel $-\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ sera un classique qu'on recroisera.

∘37∘ ♡ Voici les élèves de $MPSI_\pi$ et leurs choix d'options

	Anglais	Info.	Sport
`Abelle`	oui	oui	
`Bairnoulli`	oui		oui
`Cochy`			
`Daidekind`			
`Eulair`		oui	
`Fibonatchi`	oui		
`Gauce`			oui
`Hilbairte`		oui	oui
`I=`$\sqrt{-1}$			

Calculez $P(Anglais)$
Calculez $P(Informatique)$
Calculez $P(Sport)$
Calculez $P(Anglais\ et\ Sport)$.
Les événements $Anglais$ et $Sport$ sont ils indépendants. Les événements $Anglais$ et $Informatique$ sont ils indépendants. Les événements $Informatique$ et $Sport$ sont ils indépendants.
Calculez $P(Anglais\ et\ Sport\ et\ Informatique)$
Les événements $Anglais$, $Sport$ et $Informatique$ sont ils indépendants dans leur ensemble ?

Il y a neuf élèves (neuf cas favorables, à mettre au dénominateur).

Anglais	Informatique	Sport	Anglais et sport	Anglais et Informatique	Informatique et sport
$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

On a $P(S \cap A) = P(S) \cap P(A)$.
Sport et Anglais sont indépendants...

De même, $P(A \cap I) = P(A).P(I)$ et $P(S \cap I) = P(S).P(I)$.
deux à deux, les trois matières sont indépendantes.

Mais $P(A \cap S \cap I) = 0$.
Et $P(A).P(I).P(S) = \dfrac{1}{27}$.
Pas d'indépendance globale.

∘38∘ Y a-t-il plus de parties à 11 éléments dans un ensemble à 33 éléments que de parties à 15 éléments dans un ensemble à 30 éléments ?

parties à 11 éléments dans un ensemble à 33 éléments	$\binom{33}{11}$	$\dfrac{33.32.31.30.29.28.27.26.25.24.23}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}$
parties à 15 éléments dans un ensemble à 30 éléments	$\binom{30}{15}$	$\dfrac{30.29.28.27.26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15}$

Sans calculatrice, on fait quoi ? On fait des maths.

On calcule le quotient de ces deux entiers, pour le comparer à 1 :

$$\frac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}} = \frac{\dfrac{33.32.31.30.29.28.27.26.25.24.23}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}}{\dfrac{30.29.28.27.26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15}}$$

$$\frac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}} = \frac{33.32.31.30.29.28.27.26.25.24.23}{\dfrac{30.29.28.27.26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16}{12.13.14.15}}$$

$$\frac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}} = \frac{(33.32.31.30.29.28.27.26.25.24.23).(12.13.14.15)}{30.29.28.27.26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16}$$

On note la cohérence au passage : 15 termes en haut, 15 termes en bas.

On simplifie les éléments communs : $\dfrac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}} = \dfrac{33.32.31.12.13.14.15}{22.21.20.19.18.17.16}$.

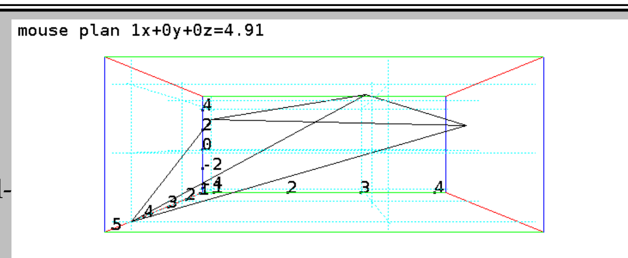
On simplifie par 11, 6, 7 : $\dfrac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}} = \dfrac{3.32.31.2.13.2.15}{2.3.20.19.3.17.16}$

On simplifie par 5 et 16 : $\dfrac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}} = \dfrac{3.2.31.2.13.2.3}{2.3.4.19.3.17.1}$.

Allez, pour finir : $\dfrac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}} = \dfrac{13.31}{17.19} = \dfrac{403}{323}$.

On a donc $\binom{33}{11} > \binom{30}{15}$ (c'est même 193536720 face à 155117520).

Le chemin pour arriver à la réponse est mille fois plus beau que la réponse elle même...



∘39∘ On donne $A(1,1,3)$, $B(2,3,5)$, $C(3,4,2)$, $D(5,1,4)$. Calculez l'aire de chacune des faces du tétraèdre.
Quelle est sa hauteur quand il est posé sur (A,B,C) ?

Les aires se calculent par la moitié de la norme du produit vectoriel.
Quant à la hauteur, on dit que le volume du parallélépipède est d'une part le déterminant d'autre part le produit de l'aire de base par la hauteur.

∘40∘ Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce déterminant vaudra 2017 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ ? & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$? Si oui, cette valeur sera-t-elle entière, si non, calculez le coefficient de X^{23} dans T_{27}.

Ce déterminant est une fonction affine du terme en position ligne 4 colonne 1 (appelé a).
On développe par rapport à la première colonne. On a trois termes dont la valeur importe peu, et un terme en $-a.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.
On calcule ce déterminant 3 sur 3 : $a - C^{te}$. On peut atteindre la valeur 2017, et même avec un entier.
Si on a le courage : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2020 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2017$.

A part ça :
67108864*x^27-452984832*x^25+1358954496*x^23-2387607552*x^21+2724986880*x^19-2118057984*x^17+
1143078912*x^15-428654592*x^13+109983744*x^11-18670080*x^9+1976832*x^7-117936*x^5+3276*x^3-27*x

---

∘41∘ Soit A une matrice de terme général a_i^k. On note $\overbrace{A}$ la matrice de terme général $\alpha_i^k = a_{n+1-k}^{n+1-i}$. Expliquez "géométriquement" comment elle se déduit de A.
Montrez qu'elle a le même déterminant que A.
Vous pourrez revenir à la formule "brute", vous pourrez aussi utiliser la permutation $i \longmapsto n+1-i$.
Exprimez $\overbrace{A}$ à l'aide de A et de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

On intervertit le rôle des lignes et des colonnes, puisque k passe en indice de ligne et i en indice de colonne.
Ensuite, on renverse l'ordre des lignes par $n+1-i$, pareil pour les colonnes (rappel : $j \longmapsto n+1-j$ renverse une liste $[1, 2, \dots n]$).
Taille 1 : bof, sans intérêt
Taille 2 : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$
Taille 3 : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a'' & a' & a \\ b'' & b' & b \\ c'' & c' & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c'' & c' & c \\ b'' & b' & b \\ a'' & a' & a \end{pmatrix}$
La matrice a tourné d'un demi-tour autour de son centre (son centre est une case immobile, ou un point fictif).
Le déterminant n'a pas changé.

∘42∘ Combien d'anagrammes de « Enis » ? Combien d'anagrammes de « Rayane » ? Et pour « Nathan » ? Et « Alexandre » ?

On ne tiendra bien spur pas compte des majuscules.
Il y a 4! angrammes d'Enis.
Quatre choix de la première lettre, puis trois pour la seconde, deux pour la troisième et le choix est imposé pour la dernière.
Le bac vus proposerait il de tracer un arbre ?

On peut aussi dire qu'il y a quatre choix pour placer le e, puis trois pour le n, deux poir le i et le s trouve sa place.

Avec Rayane, il y a six lettres, donc a priori 720 anagrammes (c'est 6!).
Mais le a est en double.
Il y a a moitié moins.

Une solution est de chercher les 720 anagrammes de rayAne, puis d'identifier par exemple nAraey avec narAey.
On tombe donc sur $\frac{6!}{2}$ ce qui en fait quand même 360 dont la liste ne sera pas donnée ici.

Une autre solution, qui sera celle utilisée pour la suite : on a six cases | | | | | | |

On va déjà placer les deux A : $\binom{6}{4}$ possibilités.
Dans les 4 cases qui restent, on place R, Y, N et E : 24 choix.
On a cette fois $\frac{6!}{4!.2!}.4!$ ce qui fait encore 360 évidemment.

---

pour Alexandre, il y a plusieurs lettres en double.
On place les deux A : $\binom{9}{2}$ choix.

Dans les sept cases qui restent, on place les deux E : $\binom{9}{2}.\binom{7}{2}$ choix à ce stade.

Il reste cinq cases pour cinq lettres distinctes : $\dfrac{9!}{2!.7!} \times \dfrac{7!}{5!.2!}.5! = \dfrac{9!}{2!2!}$. Et c'est un entier.

Et si on avait un un certain AAABBBBCDD ?

On aurait placé les A : $\binom{10}{3}$

puis les B : $\binom{10}{3} \times \binom{7}{4}$

puis le C : $\binom{10}{3} \times \binom{7}{4} \times \binom{3}{1}$

et enfin les deux D : $\binom{10}{3} \times \binom{7}{4} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{2}$.

Et si on simplifie : $\dfrac{10!}{3!.7!}.\dfrac{7!}{4!.3!}.\dfrac{3!}{1!.2!}.\dfrac{2!}{2!.0!} = \dfrac{10!}{3!.4!.1!.2!}$.

∘43∘ f est une application affine paire vérifiant $f(2) = 7$. calculez $\int_0^5 f(t).dt$.

Vous en connaissez beaucoup des applications affines qui soient paires ? On considère $x \longmapsto a.x + b$. On exeige $f(1) = f(-1)$ et on a immdiatement $a + b = -a + b$ et donc $a = 0$.
Les seules applications affines paires sont les applicatons constantes.

Approche plus lourde mais peut être plus compréhensible pour certains :
la dérivée d'une application paire est impaire, donc nulle en 0
la dérivée d'une application affine est une constante
On a donc une constante nulle en 0*. Elle est nulle.*
L'application cherchée est constante.

Comme l'application est constante et qu'on nous donne sa valeur en un point, on la connaît partout et l'intégrale est le produit hauteur fois largeur.

∘44∘ Lequel de ces deux programmes va bien construire une matrice (justifiez) :

```
def Fred(n, a, b)  :
....M=[[0 for k in range(n)] for i in range(n)]
....for k in range(n)  :
........M[k][k] = a
........M[k][k+1] = b
....return M
```

```
def Daphne(n, a, b)  :
....M=[[0 for k in range(n)] for i in range(n)]
....for k in range(n)  :
........M[k][k] = a
........M[k][k-1] = b
....return M
```

Calculez le déterminant de celle qui existe.

```
def Fred(n, a, b) :
....M = [[0 for k in range(n)] for i in range(n)]
....for k in ange(n) :
........M[k][k] = a
........M[k][k+1] = b
....return M
```

Fred va planter.
Pour k égal à $n-1$ *(dernier du range)*, il va vouloir écrire sur le terme de position `[n-1][n]`, qui n'existe pas.

Mais finalement, on le savait, les pièges montés par Fred ne marchent jamais...

En revanche, Daphné s'en sort, car même pour `k` nul, le terme `M[0][-1]` existe. il est en bout de ligne.

De fait, Daphné construit les matrices telles que $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$.

On calcule le déterminant de la matrice de taille n (qu'on note d_n) en développant par rapport à la première ligne :
$d_n = a.c_n + (-1)^{n+1}.b.\gamma_n$ où $c_n$et $\gamma_n$sont deux cofacteurs de forme assez simples.

c_n est le déterminant d'une matrice triangulaire inférieur de diagonale faite de a
γ_n est le déterminant d'une matrice triangulaire supérieur de diagonale faite de a

Ici : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

Finalement : $\boxed{d_n = a^n + (-1)^{n+1}.b^n}$

∘45∘ Résolvez $(x^2 - 5.x + 5)^{(x^2-11.x+30)} = 1$ d'inconnue réelle x.

∘46∘ Sachant $\sin(\cos^2(x) + \sin^4(x)) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, calculez $\cos(\sin^2(x) + \cos^4(x))$.

∘47∘ Pour combien d'entiers n plus petits que 2025 le nombre $p.p.c.m.(n,\ 9)$ est il un carré parfait ?

On peut y aller avec Python.

```
def pgcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = b, a%b
....return a
```

```
def ppcm(a, b) :
....return (a*b) // pgcd(a, b)
```

```
def carreparfait(n) :
....c = 0
....while c*c =< n :
........c += 1
....return c*c == n
```

Si vous me le faites avec des `int(sqrt(n))==sqrt(n)`, je vous coupe les deux oreilles.

```
compt = 0
for b in range(2026) :
....if carreparfait(ppcm(2025, b)) :
........compt += 1
```

Et j'ajoute un `print(k)` pour avoir la liste.

Et j'en trouve 93 dont voici la liste :
[0, 1, 3, 4, 5, 9, 12, 15, 16, 20, 25, 27, 36, 45, 48, 49, 60, 64, 75, 80, 81, 100, 108, 121, 135, 144, 147, 169, 180, 192, 196, 225, 240, 245, 256, 289, 300, 320, 324, 361, 363, 400, 405, 432, 441, 484, 507, 529, 540, 576, 588, 605, 625, 675, 676, 720, 729, 735, 768, 784, 841, 845, 867, 900, 960, 961, 980, 1024, 1083, 1089, 1156, 1200, 1225, 1280, 1296, 1323, 1369, 1444, 1445, 1452, 1521, 1587, 1600, 1620, 1681, 1728, 1764, 1805, 1815, 1849, 1875, 1936, 2025]

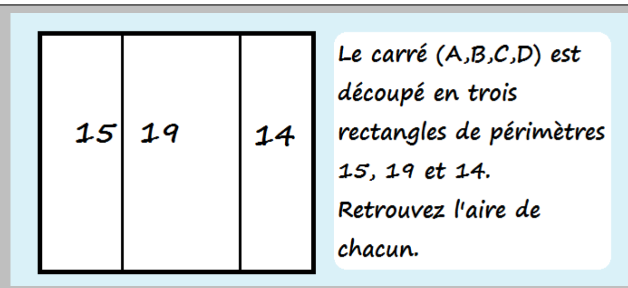
Et pour une approche mathématique sachant $2025 = 3^4.5^2$ (oh un carré ! parfait !) ?
On écrit n sous la forme $2^a.3^b.5^c.7^d \dots$ et même $3^b.5^c.N$ avec N ne contenant aucun facteur 3 ni facteur 5.
Le p.p.c.m. de n et $3^4.5^2$ est alors $3^{max(b,4)}.5^{max(c,2)}.N$.
Il doit en effet contenir le facteur N pour être multiple de n et 3 et 5 avec des exposants suffisants.
Ce nombre sera un carré parfait si et seulement si N est un carré parfait, et $max(b, 4)$ est pair ainsi que $max(c, 2)$.

b peut valoir 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10. Ah non ! On s'arrête à $3^6 = 729$.
c peut valoir 0, 1, 2, 4 (on s'arrête à 5^4).
Et N peut valoir 1, 4, 49, 121 et ainsi de suite, c'est assez lourd.

Finalement, on dit merci Python.

∘48∘

$\heartsuit_0$ Sachant $2^{3.a} = 9$, $3^{2.b} = 10$, $10^c = 11$ et $11^d = 12$, calculez $a.b.c.d$.



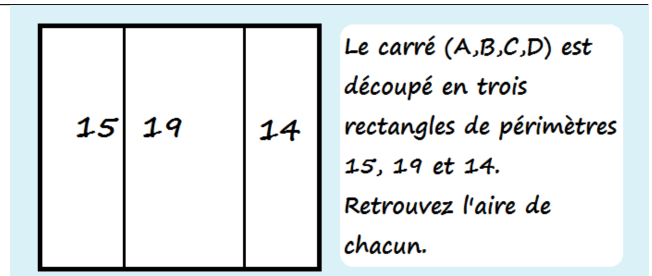
$\diamondsuit_0$ Sachant que $A = \begin{pmatrix} 11 & \\ & -13 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} -14 & \\ & 34 \end{pmatrix}$, retrouvez $\det(A)$ et $Sp(A)$.

$\diamondsuit_1$ Pour la matrice A plus haut, j'ajoute que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un de ses vecteurs propres. Trouvez alors la matrice A (deux possibilités) et diagonalisez la (choisissez une des deux possibilités).

L'équation $x^a = y$ d'inconnue a donne en passant au logarithme : $a.\ln(x) = \ln(y)$ soit $a = \dfrac{\ln(y)}{\ln(x)}$ et c'est $\log_x(y)$.

$2^{3.a} = 9$	$3^{2.b} = 10$	$10^c = 11$	$11^d = 12$
$a = \dfrac{\ln(9)}{3.\ln(2)}$	$b = \dfrac{\ln(10)}{2.\ln(3)}$	$c = \dfrac{\ln(11)}{\ln(10)}$	$d = \dfrac{\ln(12)}{\ln(11)}$
$a.b.c.d = \dfrac{2.\ln(3).\ln(10).\ln(11).\ln(12)}{3.\ln(2).2.\ln(3).\ln(10).\ln(11)} = \dfrac{\ln(12)}{3.\ln(2)} = \dfrac{\ln(12)}{\ln(8)}$			

Et on ne simplifie pas beaucoup plus.



Notons x le côté du carré *(oui, l'énoncé a parlé d'un carré, c'est important)*.
On note a, b et c les largeurs des trois rectangles (leur hauteur est x pour les trois).
On mesure les trois périmètres :

$2.(a+x) = 15$	$2.(b+x) = 19$	$2.(c+x) = 14$

mais on a aussi $a + b + c = x$ *(côté du carré)*.

Le système de quatre équations est linéaire, non dégénéré : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 19 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En combinant les premières lignes entre elle *(soustraction pour éliminer x)*, on a $2.(b-a) = 4$ et $2.(c-a) = 1$.

On remplace b et c par leur valeurs dan,s la dernière pour trouver une relation entre a et x : $a + (a+2) + \left(a + \dfrac{1}{2}\right) = x$.

On trouve $x = 3.a + \dfrac{5}{2}$.

On reporte dans la première : a vaut $\dfrac{3}{2}$.

On remonte dans toutes les équations :

$a = \dfrac{3}{2}$	$a = \dfrac{7}{2}$	$c = 1$	$x = 6$

Et comme seules les aires nous intéressent :

rectangle 1	rectangle 2	rectangle 3
$\dfrac{3}{2}$ sur 6	$\dfrac{7}{2}$ sur 6	1 sur 6
9	21	6

On pose donc $A = \begin{pmatrix} 11 & a \\ b & -13 \end{pmatrix}$ puis on calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 121 + a.b & \\ & 169 + a.b \end{pmatrix}$.

Sachant $A^2 = \begin{pmatrix} -14 & \\ & 34 \end{pmatrix}$, on déduit $a.b = -135$ (mais on ne connaît ni a ni b).

On a néanmoins : $Tr(A) = -2$ puis $\det(A) = -143 + 135 = -8$.
Le polynôme caractéristique de A est $X^2 + 2.X - 8$, de racines 2 et -4.

On pouvait aussi noter les deux valeurs propres λ_1 et λ_2.
Si A se diagonalise, elle est semblable à $\begin{pmatrix} (\lambda_1) & 0 \\ 0 & (\lambda_2) \end{pmatrix}$ et A^2 est semblable à $\begin{pmatrix} (\lambda_1)^2 & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^2 \end{pmatrix}$.
On a alors $\lambda_1 + \lambda_2 = 11 - 13$ et $(\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 = 34 - 14$. Ceci permet de retrouver λ_1 et λ_2.

Si on ajoute que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est vecteur propre (mais pour quelle valeur propre ?), on a $\begin{pmatrix} 11 & a \\ b & -13 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 11 & a \\ b & -13 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix}$.
La première donne $a = -3$ et $b = 45$ (cohérent avec $a.b = -135$).
La seconde donne $a = -5$ et $b = 27$ (cohérent avec $a.b = -135$).

$\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ b & 45 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 27 & -13 \end{pmatrix}$	
2	-4	-4	2
$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$
$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

Les calculs allaient assez vite, on savait déjà que les deux valeurs propres étaient 2 *et* -4, *et que l'un des vecteurs propres était* $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

◦49◦ Simplifiez $\displaystyle\prod_{n=2}^{N} \frac{n^3-1}{n^3+1}$ en pendant à factoriser et télescoper.

Le cours dit tout de suite que n^3+1 et n^3-1 se factorisent. Pour un point : $\begin{array}{cccc} (n^3 & -1) & = & (n-1) & .(n^2+n+1) \\ (n^3 & +1) & = & (n+1) & .(n^2-n+1) \end{array}$.
On sent qu'on va pouvoir séparer et télescoper au moins les $n+1$ et les $n-1$ (décalage de 2, mais qu'importe) :

$$\prod_{n=2}^{N} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \prod_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n+1}.\prod_{n=2}^{N} \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} = \frac{\displaystyle\prod_{n=2}^{N}(n-1)}{\displaystyle\prod_{n=2}^{N}(n+1)}.\prod_{n=2}^{N} \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} = \frac{(N-1)!}{(N+1)!/2}.\prod_{n=2}^{N} \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$$

(en effet $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}(n-1) = 1.2.3\dots(N-1)$ *reconstruit une factorielle, tandis que* $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}(n+1)$ *reconstruit tout de* 3 *à* $N+1$, *c'est* $(N+1)!$ *au premier facteur près).*

Mais peut on encore simplifier $\displaystyle\prod_{n=2}^{N} \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$? Peut y voir un autre produit télescopique ?
Posons comme par hasard $P(n) = n^2-n+1$ et calculons $P(n+1) = (n+1)^2-(n+1)+1 = n^2+n+1$. C'est trop fort :

$$\prod_{n=2}^{N} \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} = \prod_{n=2}^{N} \frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{P(N+1)}{P(2)} = \frac{N^2+N+1}{3}$$

Finalement : $\boxed{\displaystyle\prod_{n=2}^{N} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{N.(N+1)}.\frac{N^2+N+1}{3}}$ qu'on pourrait prouver aussi par récurrence.

∘50∘ J'ai calculé $\dfrac{10000}{99989999}$ et j'ai vu 0.0001000100020003000500080013002100340055008901440233037706100...
Et je me souviens que la suie de Fibonacci commence par (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610.
Ça ne peut pas être le hasard ! On pose $\rho = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Exprimez F_nà l'aide de ρ^n et ϕ^n.

♣1♣ Développez $(x+\rho).(x+\phi)$ et décomposez en éléments simples $\dfrac{\sqrt{5}.x}{1-x-x^2}$ (notée $f(x)$).

♣2♣ Donnez le développement limité en 0 de $\dfrac{1}{1-h}$ en 0 à l'ordre n.

♣3♣ Justifiez que le développement limité en 0 de $\dfrac{\rho}{\rho+h}$ en 0 à l'ordre n est $\sum\limits_{k=0}^{n} \phi^k.h^k + o(h^n)$.

♣4♣ Donnez le développement limité en 0 de $\dfrac{\phi}{\phi+h}$ en 0 à l'ordre n et celui de $f(h)$ à l'aide de la suite de Fibonacci. Donnez l'écriture irréductible de $f(10^{-4})/\sqrt{5}$. Concluez.

La suite de Fibonacci est un cas particulier de suite récurrente linéaire d'ordre 2.
On écrit juste son équation caractéristique $\lambda^2 = \lambda + 1$.
Ses deux racines sont justement $\rho = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
On sait que la suite de Fibonacci est une combinaison de deux suites géométriques de raisons ρet ϕ : $A.\rho^n + B.\phi^n$.
Les conditions initiales $F_0 = F_1$ permettent de déterminer ces constantes A et B : $\boxed{F_n = \dfrac{\rho.\rho^n - \phi.\phi^n}{\sqrt{5}}}$

On développe $(x+\rho).(x+\phi) = 1 - x - x^2$.

On décompose en éléments simples $\dfrac{\sqrt{5}.x}{1-x-x^2} = \dfrac{-\sqrt{5}.x}{(x+\rho).(x+\phi)} = \dfrac{\alpha}{x-\rho} + \dfrac{\beta}{x-\phi}$
On détermine α et β par un système ou par la méthode des pôles :

$$\frac{\sqrt{5}.x}{1-x-x^2} = \frac{-\sqrt{5}.x}{(x+\rho).(x+\phi)} = \frac{-\rho}{x+\rho} + \frac{\phi}{x+\phi}$$

Le développement limité de $\dfrac{1}{1-h}$ est du cours :

$$\frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + h^3 + \ldots + h^n + o(h^n)$$

et il vient de $\left(x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \left(x \longmapsto \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right)$.
On écrit ensuite (en exploitant au bon moment $\phi = \dfrac{-1}{\rho}$) :

$$\frac{\rho}{h+\rho} = \frac{1}{1+\frac{h}{\rho}} = \sum_{k=0}^{n}\Big(-\frac{h}{\rho}\Big)^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^{n} h^k.\Big(-\frac{1}{\rho}\Big)^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^{n} h^k.\phi^k + o(h^n)$$

On fait de même avec l'autre racine :

$$\frac{\phi}{h+\phi} = \frac{1}{1+\frac{h}{\phi}} = \sum_{k=0}^{n}\Big(-\frac{h}{\phi}\Big)^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^{n} h^k.\Big(-\frac{1}{\phi}\Big)^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^{n} h^k.\phi^k + o(h^n)$$

On soustrait les deux développements limités :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}(\rho^k - \phi^k).x^k + o(x^n)$$

Mais on relie ceci à la question du début sur la suite de Fibonacci :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} F_{n-1}.\sqrt{5}.x^k + o(x^n)$$

On nous invite à regarder $f(10^{-4})/\sqrt{5}$. On trouve $\dfrac{10^{-4}}{1-10^{-4}-10^{-8}} = \dfrac{10^4}{10^8-10^4-1} = \dfrac{10000}{10000000-10000-1} = \dfrac{10000}{99989999}$.
C'est notre rationnel du début !

Mais on a aussi $f(10^{-4})$ qui doit « beaucoup ressembler » à $\sum\limits_{k=0}^{n} F_n.\sqrt{5}.10^{-4.n}$.

Si on simplifie et ne regarde pas le $o(h^n)$ (à tort) : $\dfrac{10^{-4}}{1-10^{-4}-10^{-8}} = 10^{-4}.F_0 + 10^{-8}.F_1 + 10^{-12}.F_2 + 10^{-16}.F_3 + \dots$

Et calculer cette somme, c'est prendre F_0 et le déplacer quatre chiffres derrière la virgule.
Puis prendre F_1 et le placer huit chiffres derrière la virgule.
Quant à F_2 on le place douze chiffres derrière la virgule.

Simplement, comme on se déplace à chaque fois de quatre chiffres, il ne faut pas aller trop loin. Vient le moment où les $F_n$ont plus de quatre chiffres et « se marchent les uns sur les autres ».

De plus, on prétend avoir utilisé un développement limité. mais on ne peut pas y placer un nombre.
Un développement limité n'est valable que pour une variable qui tend vers 0. Et 10^{-4} ne tend vers rien à part lui même.

En tant que matheux, il faudrait prendrd es formules de Taylor avec reste intégrale, et dire que quand on écrit $\dfrac{10^{-4}}{1-10^{-4}-10^{-8}} \simeq 10^{-4}.F_0 + 10^{-8}.F_1 + 10^{-12}.F_2 + 10^{-16}.F_3$ l'erreur est égale au reste. Elle est majorée par 10^{-18} après calculs (non faits ici) et n'infuence pas les seize premiers chiffres derrière la virgule.

∘51∘ x, y et z sont trois réels strictement positifs. On doit montrer $x+y+z \leqslant 2.\Big(\dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{x+z} + \dfrac{z^2}{x+y}\Big)$.
Il parait que c'est une inégalité de Cauchy-Schwarz avec des $\sqrt{y+z}$ et autres $\sqrt{x+z}$ dans un des vecteurs. Alors ?

On nous donne trois réels. On rappelle : $(a.\alpha + b.\beta + c.\gamma)^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2).(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.

Géométriquement, c'est le produit scalaire des deux vecteurs $(a,\ b,\ c)$ et $(b,\ c,\ a)$ plus petit que le produit des normes.

Ce n'est pas moi qui le dis, c'est Cauchy et Schwarz.
Mais ce qui est étrange c'est que notre premier membre ne contient pas de carré. Et on a des carrés incomplets dans le second.
Si on prenait $a = \dfrac{x}{\sqrt{y+z}}$ on aurait bien $a^2 = \dfrac{x}{\sqrt{y+z}}$(rappelons que tout le monde est positif).
Et l'énoncé nous pousse à prendre $\alpha = \sqrt{y+z}$. On a alors $\alpha^2 = y+z$ dont on ne sait pas quoi faire, mais ça va venir.
Ensuite, $a.\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{y+z}}.\sqrt{y+z} = x$. C'est bon signe. Je signe :

$a = \dfrac{x}{\sqrt{y+z}}$	$b = \dfrac{y}{\sqrt{x+y}}$	$\gamma = \dfrac{z}{\sqrt{x+y}}$
$\alpha = \sqrt{y+z}$	$\beta = \sqrt{x+z}$	$\gamma = \sqrt{x+y}$

L'inégalité nous donne $(x+y+z)^2 \leqslant \Big(\dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{x+z} + \dfrac{z^2}{x+y}\Big).\Big((y+z)+(x+z)+(x+y)\Big)$

On simplifie : $(x+y+z)^2 \leqslant \Big(\dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{x+z} + \dfrac{z^2}{x+y}\Big).2.(x+y+z)$.
Il ne reste qu'à simplifier par $x+y+z$ strictement positif.

∘52∘ Calculez $\sum\limits_{k=0}^{p} k^2$, $\sum\limits_{k=0}^{2.p+1} (-1)^k.k^2$ et $\sum\limits_{k=0}^{2.p} (-1)^k.k^2$ pour tout p.
Calculez $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k.k^2}{\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^n.k^3}$ suivant la parité de n (oui, $(-1)^n$en bas). Montrez : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k.k^2}{\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^n.k^3} = 2$.

La somme $\sum_{k=0}^{p} k^2$ vaut $\frac{p.(p+1).(2.p+1)}{6}$ c'est du cours.

Ensuite, pour $\sum_{k=0}^{2.p+1} (-1)^k.k^2$, on doit séparer en fonction de la parité de k :

$$\sum_{k=0}^{2.p}(-1)^k.k^2 = \sum_{q=0}^{p}(2.q)^2 - \sum_{q=0}^{p}(2.q+1)^2 = \sum_{q=0}^{p} 4.q^2 - \sum_{q=0}^{p}(4.q^2+4.q+1)$$

Il ne reste que la somme $\sum_{q=0}^{p}(4.q+1)$ (arithmétique de raison 4) : $\sum_{k=0}^{2.p+1} (-1)^k.k^2 = -(2.p+1).(p+1)$.

La somme $\sum_{k=0}^{2.p}(-1)^k.k^2$ a juste un terme de moins (et encore, c'est un terme négatif) :

$$\sum_{k=0}^{2.p}(-1)^k.k^2 = \sum_{k=0}^{2.p}(-1)^k.k^2 + (2.p+1)^2 = p.(2.p+1)$$

On peut aussi regrouper dans cette somme les termes deux à deux :

$$\sum_{k=0}^{2.p}(-1)^k.k^2 = (-1+2^2)+(-3^2+4^2)+\ldots+(-(2.q-1)^2+2.q^2)+\ldots+(-(2.p-1)^2+(2.p)^2) = 3+7+\ldots+(4.q-1)+\ldots+(4.p-1)$$

Pour tout n, on peut donc calculer le quotient $\dfrac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k^2}{\sum_{k=0}^{n}(-1)^n.k^3}$ en distinguant les cas suivant la parité de n :

n pair ($n = 2.p$)	n impair ($n = 2.p+1$)
$\dfrac{\sum_{k=0}^{2.p}(-1)^k.k^2}{\sum_{k=0}^{2.p}(-1)^n.k^3} = \dfrac{p.(2.p+1)}{(2.p.(2.p+1))^2/4} = \dfrac{1}{p.(2.p+1)}$	$\dfrac{\sum_{k=0}^{2.p+1}(-1)^k.k^2}{\sum_{k=0}^{2.p+1}(-1)^n.k^3} = \dfrac{-(p+1).(2.p+1)}{-((2.p+1).(2.p+2))^2/4} = \dfrac{1}{(p+1).(2.p+1)}$

Mais finalement, on a toujours $\frac{2}{n.(n+1)}$. Vérifiez : $\frac{2}{2.p.(2.p+1)} = \frac{1}{p.(2.p+1)}$ et $\frac{2}{(2.p+1).(2.p+1+1)} = \frac{1}{(2.p+1).(p+1)}$.

La dernière série est à termes positifs. Et c'est la série de terme général $\frac{2}{n.(n+1)}$.

Elle télescope : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n.(n+1)} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \lim_{N\to+\infty} 2 - \frac{2}{N+1} = 2$

∘53∘ On travaille avec les entiers de $range(7)$ et les opérations modulo 7 :
$A = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 1 & 3 \\ & 5 & \end{pmatrix}$ et $Com(A) = \begin{pmatrix} 3 & & 2 \\ & 2 & \\ 1 & & 6 \end{pmatrix}$. Retrouvez les valeurs absentes (entiers entre 0 et 6).
Vérifiez que $M - 5.I_3$ n'est pas inversible (toujours modulo 7 voyons).
Trouvez un vecteur U dont la première composante vaut 1 et vérifiant $M.U = 5.U$. Calculez alors $M^6.U$.

Posons $A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 2 & 1 & 3 \\ c & 5 & d \end{pmatrix}$ et calculons $Com(A) = \begin{pmatrix} d-15 & 3.c-2.d & 10-c \\ 5.b-d & a.d-b.c & c-5.a \\ 3-b & 2.b-3.a & a-2 \end{pmatrix}$.

Sachant qu'on a aussi $Com(A) = \begin{pmatrix} 3 & & 2 \\ & 2 & \\ 1 & & 6 \end{pmatrix}$, on trouve $d - 15 = 3$ soit $d = 18$ et même $d = 4$.
De même (ligne 1 colonne 3) $10 - c = 2$ donc $c = 8 = 1$.
On poursuit $3 - b = 1$ donc $b = 2$ et enfin $a = 1$. On vérifie au centre : $a.d - b.c = 1.4 - 1.2 = 2$.

On complète ensuite avec les termes absents : $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } Com(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}}$

On passe au déterminant

$$\det(A-5.I_3)=\begin{vmatrix}1-5 & 1 & 2\\ 2 & 1-5 & 3\\ 1 & 5 & 4-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & 5 & 6\end{vmatrix}=3.\begin{vmatrix}3 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}-2.\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{vmatrix}+1.\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}$$

Il reste$3.3-2.(-4)+1.(-3)=2+1+4=0$. Il est bien nul.

On résout ensuite $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 5.x\\ 5.y\end{pmatrix}$ avec trois équations pour deux inconnues.
Les deux premières donnent déjà $x+2.y=4$ et $2+x+3.y=5.x$ (et donc $-4.x+3.y=-2$ puis $3.x+3.y=5$ et enfin $x+y=4$).
On trouve $x=4$ et $y=0$. On vérifie dans la dernière équation :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 6\\ 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 6\\ 0\end{pmatrix}=5.\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 0\end{pmatrix}$$

Pour ce vecteur, on a $M^6.U=5^6.U$ (en mettant en boucle $M.U=5.U$). Mais $5^6=1$ (c'est Fermat qui le dit).

◦54◦ Un élève me dit : si la loi $\otimes$ est anticommutative ($\forall(a,\ b),\ a\otimes b=-b\otimes a$), alors elle ne peut pas être associaitive, à moins d'être nulle. Il a raison ?

◦55◦ Le point $M(x,y,z)$ est dans le plan d'équation $2.x+3.y-z=5$. Montrez avec l'aide de Cauchy et Schwarz que la distance $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ du point M à l'origine $O(0,0,0)$ vaut au moins $\dfrac{5}{\sqrt{14}}$.

Le point M vérifie $2.x+3.y-z=5$.
On veut estimer $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Et on nous dit qu'on peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Mais appliquée à qui ?
On prend $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$. Le produit scalaire vaut $2.x+3.y-z$ ce qui fait 5. Et le produit des normes vaut $\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{14}$.
L'inégalité nous dit alors $5=2.x+3.y-z\leqslant\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{14}$. En faisant passer le $\sqrt{14}$ de l'autre côté, on a la minoration demandée, et on a même le cas d'égalité : $\overrightarrow{OM}$ colinéaire à $\overrightarrow{n}$.

◦56◦ On pose $a_k=\binom{20}{k}.\binom{30}{k}$ pour k de 0 à 20. Calculez $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ puis $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}-1$ et dites moi lequel des a_k est le plus grand.

On a posé $a_k=\dfrac{20!}{k!.(20-k)}.\dfrac{30!}{k!.(30-k)!}$ et calculé

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{20!}{(k+1)!.(19-k)}.\frac{30!}{(k+1)!.(29-k)!}.\frac{k!.(20-k)!}{20!}.\frac{k!.(30-k)!}{30!}=\frac{(30-k).(20-k)}{(k+1)^2}$$

Et si on nous le demande : $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}-1=\dfrac{599-52.k}{(k+1)^2}$.
Le signe de cette quantité nous renseigne sur la croissance et décroissance de a_k.
Tant que $52.k$ est plus petit que 599, la suite croît. Son maximum est donc aux alentours de $\dfrac{599}{52}$.

Voici d'ailleurs des valeurs calculées à l'ordinateur :

a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
2 403 028 914 000	5 550 996 791 340	9 175 201 308 000	10 895 551 553 250	9 283 783 572 000	5 636 582 883 000	2 404 942 030 080

◦57◦ Montrez : $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n^2+4.n+3}}{\sqrt[3]{n^3+6.n^2+8.n}}=\frac{12}{\sqrt[3]{288}}$.

Dans le produit $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n^2+4.n+3}}{\sqrt[3]{n^3+6.n^2+8.n}}$ tout existe, sauf peut-être le produit lui même, il y a une infinité de facteurs.

Travaillons à horizon fini N et on fera tendre N vers l'infini. Et surtout, partons à la recherche du télescopage. En factorisant tout ce qui se factorise.

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{n^2+4.n+3}}{\sqrt[3]{n^3+6.n^2+8.n}}=\prod_{n=1}^{N}\frac{(n+1)^{1/2}.(n+3)^{1/2}}{n^{1/3}.(n+2)^{1/3}.(n+4)^{1/3}}=\Big(\prod_{n=1}^{N}n+1\Big)^{1/2}.\Big(\prod_{n=1}^{N}n+3\Big)^{1/2}.\Big(\prod_{n=1}^{N}n\Big)^{-1/3}.\Big(\prod_{n=1}^{N}n+2\Big)^{-1/3}.\Big(\prod_{n=1}^{N}n+4\Big)^{-1/3}$$

Tout est en place pour le télescopage :

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{n^2+4.n+3}}{\sqrt[3]{n^3+6.n^2+8.n}}=\Big(\prod_{k=2}^{N+1}k\Big)^{1/2}.\Big(\prod_{k=4}^{N+3}k\Big)^{1/2}.\Big(\prod_{n=1}^{N}k\Big)^{-1/3}.\Big(\prod_{n=3}^{N+2}k\Big)^{-1/3}.\Big(\prod_{n=5}^{N+4}k\Big)^{-1/3}$$

Tous les termes de 5 à N s'en vont (exposant $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$), et il reste quelques termes :

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{n^2+4.n+3}}{\sqrt[3]{n^3+6.n^2+8.n}}=\Big(\prod_{2,3,4,N+1}k\Big)^{1/2}.\Big(\prod_{4,N+1,N+2,N+3}k\Big)^{1/2}.\Big(\prod_{1,2,3,4}k\Big)^{-1/3}.\Big(\prod_{3,4,N+1,N+2}k\Big)^{-1/3}.\Big(\prod_{N+1,N+2,N+3,N+4}k\Big)^{-1/3}$$

Il reste $\displaystyle\prod_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{n^2+4.n+3}}{\sqrt[3]{n^3+6.n^2+8.n}}=\frac{(2^2.3^2.4.(N+1)^2.(N+2).(N+3))^{1/2}}{(2.3^2.4^2.(N+1)^2.(N+2)^2.(N+3).(N+4))^{1/3}}$.

On isole la constante numérique $\frac{12}{\sqrt[3]{288}}$ et l'équivalent $\frac{(N^4)^{1/2}}{(N^6)^{1/3}}$ (qui vaut 1).

On peut passer à la limite (N tend vers l'infini), et on trouve $\frac{12}{\sqrt[3]{288}}$.

∘58∘ On sait $5^x+5^y=630$ et $\frac{x+y}{5}=1$. Retrouvez x et y (pour information $630=625+5$, si si).

Si on nous dit $\frac{x+y}{5}=1$, remplaçons y par $5-x$ dans $5^x+5^y=630$. On obtient $5^x+\frac{5^5}{5^x}=630$.
On va multiplier par 5^x et poser (naturellement $X=e^x$). Et hop, une équation de degré 2 comme quand on résout $ch(x)=a$.
Ici : $X^2-630.X+5^5=0$. Le discriminant vaut $(630)^2-4.5^5$, ce qui fait $(5^4+5)^2-4.5^5$ soit finalement $(5^4-5)^2$.
Les deux racines sont $X_1=625$ et $X_2=5$.

On revient à x : $5^x=625$ ou $5^x=5$.
On trouve $x=4$ et $y=1$ comme première solution, puis $x=1$ et $y=5$ comme seconde solution (symétrique).

Et on se dit que c'étaient des solutions évidentes.

∘59∘ $\begin{vmatrix}1&2&x\\1&3&y\\2&1&z\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}2&1&x\\3&-1&y\\1&0&z\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&1&x\\-1&1&y\\0&2&z\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&2&x\\2&1&y\\1&1&z\end{vmatrix}$.
Existe-t-il (x,y,z) non nul tel que les deux premiers déterminants soient nuls ?
Existe-t-il (x,y,z) non nul tel que les trois premiers déterminants soient nuls ?
Existe-t-il (x,y,z) non nul tel que les trois derniers déterminants soient nuls ?

Facile d'annuler à la fois $\begin{vmatrix}1&2&x\\1&3&y\\2&1&z\end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix}2&1&x\\3&-1&y\\1&0&z\end{vmatrix}$, il suffit de prendre $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ (ou un de ses multiples).
On peut même se convaincre que ce sont les seules solutions (deux équations, trois inconnues ; intersection de deux plans de $\mathbb{R}^3$).

Pour annuler les trois premiers, on devient plus exigeant. Si on se fie d'ailleurs à la question précédente, il faut déjà annuler les deux premiers et prendre un multiple de $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ et dans ce cas, $\begin{vmatrix}1&1&2.a\\-1&1&3.a\\0&2&1.a\end{vmatrix}$ n'est pas nul, sauf pour a nul.

Sinon, on peut aussi transcrire les trois nullités de déterminants en trois équations : $\left\{\begin{array}{rrrcl}-5.x&+3.y&+z&=&0\\x&+y&-5.z&=&0\\2.x&+2.y&-2.z&=&0\end{array}\right|$.

Or, le déterminant $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ est non nul [4]. Seul le vecteur nul valide, et nous on le refuse.

Si on ne voit rien pour les trois derniers déterminants, on écrit le système $\left\{\begin{array}{cccc|} x & +y & -5.z & = & 0 \\ 2.x & +2.y & -2.z & = & 0 \\ x & +y & -3.z & = & 0 \end{array}\right.$.

Cette fois, le système est dégénéré : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ (et $2.L_1 + L_2 = 4.L_3$).

En fait, ce système demande juste $x + y = 0$ et $z = 0$. Tout multiple de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

∘60∘ Inversez $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Changez un coefficient pour qu'elle soit non inversible.

Ah oui, comme souvent, on travaille avec les entiers de range(7) pour les opérations modulo 7.

On calcule le déterminant de par règle de Sarrus ou développement en ligne/colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 1.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 1 + 1 - 2 = 4$$

Le déterminant est non nul (d'inverse 2), la matrice est inversible.

On calcule la matrice des cofacteurs $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

on réduit modulo 7 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ on transpose $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ et divise par 4 : $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

On vérifie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 7 & 14 \\ 21 & 15 & 21 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I_3$$

4. -64, pas loin du carré du déterminant des trois vecteurs initiaux, il y a un rapport