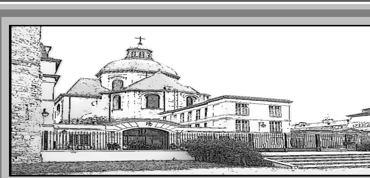
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi octobre
M.P.S.I.2



2024 2025

TD04

◃0▹

♡ Pour tout n, on pose $I_n = \int_0^1 t^n.e^{-t}.dt$. calculez I_0, I_1 et I_2.
♡ Montrez qu'il existe deux suites d'entiers naturels (a_n) et (b_n) vérifiant $I_n = a_n + b_n.e^{-1}$ (exprimez a_{n+1} et b_{n+1} à l'aide de $a_n$et b_n).
♡Montrez pour tout n : $0 < I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ (surtout pas en calculant l'intégrale, mais en la majorant par une intégrale plus simple, c'est ça l'esprit des maths, on réfléchit avant de calculer, alors que dans les autres matières on vous demande de calculer et réfléchir en même temps).
On suppose que e est un rationnel, de la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux.
Montrez alors $\forall(a,\ b) \in \mathbb{Z}^2,\ \left(|a.e+b| < \frac{1}{q}\right) \Rightarrow (a.e+b=0)$.
Concluez : e est irrationnel.

$I_0 = \int_0^1 t^0.e^{-t}.dt$	$I_1 = \int_0^1 t^1.e^{-t}.dt$	$I_2 = \int_0^1 t^2.e^{-t}.dt$	$I_3 = \int_0^1 t^3.e^{-t}.dt$
$1 - e^{-1}$	$1 - 2.e^{-1}$	$2 - 5.e^{-1}$	$6 - 16.e^{-1}$
$a_0 = 1$ et $b_0 = -1$	$a_1 = 1$ et $b_1 = -2$	$a_2 = 2$ et $b_2 = -5$	$a_3 = 6$ et $b_3 = -16$

Ce sont des calculs simples, par parties. En D.S., ils permettraient de gagner des points sans faire de gros effort de réflexion.

On calcule $I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}.e^{-t}.dt = [-t^{n+1}.e^{-t}]_{t=0}^1 + (n+1).\int_0^1 t^n.e^{-t}.dt$

t^{n+1}	$\hookrightarrow$	$(n+1).t^n$
e^{-t}	$\hookleftarrow$	$-e^{-t}$

On a donc $I_{n+1} = -e^{-1} + (n+1).I_n$.

Supposons pour un n quelconque donné qu'on a bien $I_n = a_n + b_n.e^{-1}$.
On a alors $I_{n+1} = (n+1).a_n + ((n+1).b_n - 1).e^{-1}$.
On pose $a_{n+1} = (n+1).a_n$ et $b_{n+1} = -1 + (n+1).b_n$.
Ceci définit deux nouveaux entiers, et on a alors $I_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}.e^{-1}$.
On a prouvé l'existence des deux suites, et la formule.

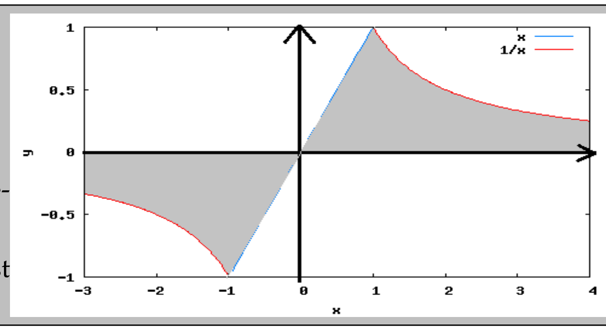
Supposons que e soit un rationnel, de la forme $\frac{p}{q}$.
Alors, tous les I_ns'écrivent $\frac{q.a_{n+1} + b_{n+1}.p}{p}$. Ce sont es rationnels, de dénominateur q (ou peut être moins en cas de simplification).

On encadre l'intégrale, non pas en la calculant, mais en la voyant comme une aire.
Déjà, la fonction intégrée est positive : I_n est positive.

Ensuite, pour tout t positif, on a $t^n.e^{-t} \leqslant t^n$ puisque t est positif.
On intègre de 0 à 1 : $I_n \leqslant \int_0^1 t^n.dt = \frac{1}{n+1}$.

La suite d'intégrales tend vers 0.

Si on prend n égal à p (numérateur de e qui est peut être très grand, mais qui existe si on a supposé e rationnel).
On a alors $0 < a_p + b_p.e^{-1} = \frac{p.a_p+q.b_p}{p} = I_p < \frac{1}{p+1}$.
On multiplie par p : $0 < p^2.a_p + q.p.b_p < \frac{p}{p+1} < 1$.
Le nombre $p^2.a_p + q.p.b_p$ est un entier. Strictement entre 0 et 1.
Pas possible...

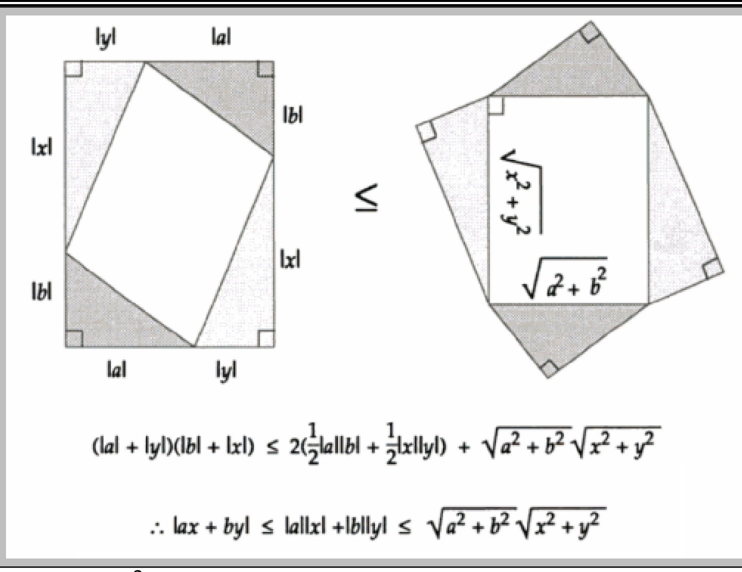


◁1▷ ♡ On pose $f = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} x & si & |x| \leqslant 1 \\ 1/x & sinon & \end{array} \right|$. Représentez graphiquement.
f est elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Déterminez $f \circ f$. Est elle injective ?

f est définie partout mais pas injective : $f(2) = f(1/2)$.
$f \circ f$ ne peut pas être injective.

On montre pour tout x $f(f(x)) = f(x)$.
En effet, $f(f(x))$ est de la forme $f(y)$ avec $y = f(x)$. Et ce y est entre -1 et 1 (graphe ou tableau de variations). On a donc $f(f(x)) = f(y) = y = f(x)$.
Un exemple : $f(f(2)) = f(1/2) = 1/2$.

Et bien sûr, $f \circ f$ n'est pas injective non plus.



◁2▷ Comparez
$2.\Big(\sum_{i\leqslant n} a_i.b_i\Big)^2 + \sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} (a_i.b_j - a_j.b_i)^2$
et $\Big(\sum_{i\leqslant n}(a_i)^2\Big).\Big(\sum_{j\leqslant n}(b_j)^2\Big)$.
Retrouvez l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Montrez :
$a.\cos(t) + b.\sin(t) \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$.

Montrez :
$a.b + b.c + c.a \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

$2.\Big(\sum_{i\leqslant n} a_i.b_i\Big)^2 = 2.\Big(\sum_{i\leqslant n} a_i.b_i\Big).\Big(\sum_{j\leqslant n} a_j.b_j\Big)$

$2.\Big(\sum_{i\leqslant n} a_i.b_i\Big)^2 = 2.\Big(\sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} a_i.b_i.a_j.b_j\Big)$ (chacun rencontre chacun)

de même $\sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} (a_i.b_j - a_j.b_i)^2 = \sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} (a_i.b_j)^2 + \sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} (a_j.b_i)^2 - 2.\sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} a_i.b_j.a_j.b_i$

Le terme $\sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} a_i.b_i.a_j.b_j$ et le terme $\sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} a_i.b_j.a_j.b_i$ sont égaux.

On somme $2.\Big(\sum_{i\leqslant n} a_i.b_i\Big)^2 + \sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} (a_i.b_j - a_j.b_i)^2 = \sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} (a_i.b_j)^2 + \sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} (a_j.b_i)^2$.

Les deux termes de droite sont égaux (variables muettes).

$2.\Big(\sum_{i\leqslant n} a_i.b_i\Big)^2 + \sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} (a_i.b_j - a_j.b_i)^2 = 2.\sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} (a_i.b_j)^2$

De plus, les variables i et j jouent des rôles indépendants : $\sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} (a_i)^2.(b_j)^2 = \Big(\sum_{i\leqslant n}(a_i)^2\Big).\Big(\sum_{j\leqslant n}(b_j)^2\Big)$.

$$2.\Big(\sum_{i\leqslant n} a_i.b_i\Big)^2 + \sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} (a_i.b_j - a_j.b_i)^2 = 2.\Big(\sum_{i\leqslant n}(a_i)^2\Big).\Big(\sum_{j\leqslant n}(b_j)^2\Big)$$

On arrange pour partir en direction de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\frac{1}{2}.\sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}}(a_i.b_j-a_j.b_i)^2=\Big(\sum_{i\leqslant n}(a_i)^2\Big).\Big(\sum_{j\leqslant n}(b_j)^2\Big)-\Big(\sum_{i\leqslant n}a_i.b_i\Big)^2$$

Une somme de carrés de réels, c'est positif :

$$0\leqslant\Big(\sum_{i\leqslant n}(a_i)^2\Big).\Big(\sum_{j\leqslant n}(b_j)^2\Big)-\Big(\sum_{i\leqslant n}a_i.b_i\Big)^2$$

et donc finalement

$$\Big(\sum_{i\leqslant n}a_i.b_i\Big)^2\leqslant\Big(\sum_{i\leqslant n}(a_i)^2\Big).\Big(\sum_{j\leqslant n}(b_j)^2\Big)$$

C'est beau, mais c'est moins beau que la méthode avec un discriminant...

$a.\cos(t)+b.\sin(t)\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$ provient de la forme $\sqrt{a^2+b^2}.\cos(t-\varphi)$ avec φ bien choisi.
Mais c'est aussi l'inégalité de Cauchy-Schwarz entre les deux vecteurs $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}$ de normes respectives $\sqrt{a^2+b^2}$ et 1.

L'inégalité $a.b+b.c+c.a\leqslant a^2+b^2+c^2$ est un classique. Il suffit de trouver deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}c\\a\\b\end{pmatrix}$.

Leur produit scalaire vaut $a.c+b.a+c.b$.
Et le produit des normes vaut $(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2$.

◃3▹ Soient a, b, c et d quatre réels. Montrez : $(a^5+b^5+c^5+d^5)^2\leqslant(a^4+b^4+c^4+d^4).(a^6+b^6+c^6+d^6)$.

Inégalité de Cauchy Schwarz entre les deux vecteurs $\begin{pmatrix}a^2\\b^2\\c^2\\d^2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}a^3\\b^3\\c^3\\d^3\end{pmatrix}$ de normes $\sqrt{a^4+b^4+c^4+d^4}$ et $\sqrt{a^6+b^6+c^6+d^6}$ et de produit scalaire $a^5+b^5+c^5+d^5$.

◃4▹ Montrez : $\int_0^1|\ln(t)|^n.dt=n!$ pour tout entier naturel n. Montrez alors $(n+m)!\leqslant\sqrt{(2.n)!.(2.m)!}$. Pouvez vous le prouver sans passer par les intégrales ?

On ne se préoccupera pas à notre niveau de l'existence de l'intégrale, même si en fait en 0, $\ln(t)$ « explose ».
On peut ensuite calculer la première (puissance 0) : $\int_0^1 1.dt=1$.

Et poursuivre (avec une récurrence sur n) en intégrant $\int_\varepsilon^1|\ln(t)|^{n+1}.dt$ par parties :

$(-\ln(t))^{n+1}$	$\hookrightarrow$	$(n+1).(-\ln(t))^n.\frac{-1}{t}$
1	$\hookleftarrow$	t

En effet, sur l'intervalle, $\ln(t)$ est négatif, et on remplace $|\ln(t)|$ directement par $-\ln(t)$ (ou pire par $\ln\left(\frac{1}{t}\right)$ dans certains livres).
On trouve

$$\int_\varepsilon^1|\ln(t)|^{n+1}.dt=\Big[(-1)^{n+1}.t.\ln(t)^{n+1}\Big]_{t=\varepsilon}^{t=1}+(n+1).\int_\varepsilon^1(-\ln(t))^n.dt$$

En 1, le logarithme du crochet $\Big[(-1)^{n+1}.t.\ln(t)^{n+1}\Big]_{t=\varepsilon}^{t=1}$ est nul.
Et quand ε tend vers 0 , la forme indéterminée $t.\ln(t)^{n+1}$ tend vers 0 [1].
Bref, sous réserve d'existence du membre de droite $\int_0^1|\ln(t)|^{n+1}.dt=(n+1).\int_0^1(-\ln(t))^n.dt$.

1. changez de variable avec $T=\frac{1}{t}$ et vous retrouvez ce que vous connaissez bien

Dès lors, par récurrence sur n,chaque $\int_0^1 (-\ln(t))^n.dt$ existe et vaut $n!$.

Remarque : C'est ce qui permet ensuite de définir par exemple $\left(\frac{1}{2}\right)!$ comme étant $\int_0^1 \sqrt{|\ln(t)|}.dt$.

La majoration $(n+m)! \leqslant \sqrt{(2.n)!.(2.m)!}$ c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On rappelle :

$$\int_0^1 f(t).g(t).dt \leqslant \sqrt{\int_0^1 \Big(f(t)\Big)^2.dt.\int_0^1 \Big(g(t)\Big)^2.dt}$$

On prend $f = t \longmapsto |\ln(t)|^n$ et $g = t \longmapsto |\ln(t)|^m$, et c'est réglé.

On peut aussi tenter une preuve directe. On ne restreint pas la généralité en supposant $n \leqslant m$.
On étudie alors $\frac{(n+m)!}{(2.n)!} \times \frac{(n+m)!}{(2.m)!}$ en simplifiant les termes : $\frac{(2.n+1).(2.n+2)\dots(n+m)}{(n+m+1).(n+m+2)\dots(2.m)}$.
On compte qu'il y a autant de termes en haut qu'en bas (en l'occurrence $m-n$), et que chaque terme du haut est plus petit que chaque terme du bas.

Pour saisir : $\frac{(5+3)!}{(2.3)!}.\frac{(5+3)!}{(2.5)!} = \frac{8!}{6!}.\frac{8!}{10!} = 7.8.\frac{1}{9.10} = \frac{7.8}{9.10}$.

Remarque : On verra que ceci revient à dire que la factorielle est « logarithmiquement convexe ». Et c'est une des clefs de cette application, qui permet de l'étendre de « $n!$ pour $n \in \mathbb{N}$ » à « $x!$ pour $x \in [0, +\infty[$ ».

◃5▹ Montrez pour α et β réels positifs : $\alpha+\beta \geqslant 2.\sqrt{\alpha.\beta}$. Soient $[a_1, \dots a_n]$ et $[b_1, \dots b_n]$ deux listes de réels, on pose $A = \sum_{k=1}^n (a_k)^2$, $B = \sum_{k=1}^n (b_k)^2$ et $P = \sum_{k=1}^n a_k.b_k$ *(supposé non nul)*. Montrez : $\sum_{k=1}^n \Big(\frac{(a_k)^2.B}{P^2} + \frac{(b_k)^2}{B}\Big) \geqslant 2.\sum_{k=1}^n \frac{a_k.b_k}{P}$.
Retrouvez l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

La formule $\alpha+\beta \geqslant 2.\sqrt{\alpha.\beta}$ vient de $(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2 \geqslant 0$. C'est direct et rapide.

Lourdeur : *Je suis prêt à parier que je vais voir passer des preuves qui commencent par $(\alpha+\beta)^2 \geqslant 4.\alpha.\beta$ et $(\alpha+\beta)^2 - 4.\alpha.\beta = \dots = (\alpha-\beta)^2 \geqslant 0$.*
C'est bon comme démonstration, mais ça tend à prouver que vous avez peur des racines carrées.

La formule $\sum_{k=1}^n \Big(\frac{(a_k)^2.B}{P^2} + \frac{(b_k)^2}{B}\Big) \geqslant 2.\sum_{k=1}^n \frac{a_k.b_k}{P}$ est juste une application de la question précédente avec $\alpha = \frac{(a_k)^2.B}{P^2}$ et $\beta = \frac{(b_k)^2}{B}$ puis bien sûr

$$\sqrt{\alpha.\beta} = \sqrt{\frac{(a_k)^2.B}{P^2}.\frac{(b_k)^2}{B}} = \sqrt{\frac{(a_k.b_k)^2}{P^2}} = \frac{|a_k.b_k|}{|P|} \geqslant \frac{a_k.b_k}{P}$$

Il ne reste qu'à sommer ces inégalités.

Remarque : *L'argument « nombres positifs » est à citer pour multiplier membre à membre des inégalités.*
Mais pour les sommer, on n'a besoin d'aucun contrôle sur les signes.
D'autre part, si vous écrire une égalité
$\sqrt{\alpha.\beta} = \sqrt{\frac{(a_k)^2.B}{P^2}.\frac{(b_k)^2}{B}} = \frac{a_k.b_k}{P}$*, c'est une erreur.*
Il reste un signe...

A présent, on peut calculer ces sommes *(et seulement seulement maintenant, n'allez pas trop vite en besogne*[2]*)*.

2. *trouver une inégalité est plus important que de calculer une somme, on est en maths*

Premier membre :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(a_k)^2.B}{P^2}+\frac{(b_k)^2}{B}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k)^2.B}{P^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(b_k)^2}{B}\\
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(a_k)^2.B}{P^2}+\frac{(b_k)^2}{B}\right) &= \frac{B}{P^2}.\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2+\frac{1}{B}.\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2\\
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(a_k)^2.B}{P^2}+\frac{(b_k)^2}{B}\right) &= \frac{B}{P^2}.A+\frac{1}{B}.B\\
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(a_k)^2.B}{P^2}+\frac{(b_k)^2}{B}\right) &= \frac{A.B}{P^2}+1
\end{aligned}$$

Second membre :

$$\begin{aligned}
2.\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k.b_k}{P} &= \frac{2}{P}.\sum_{k=1}^{n}a_k.b_n\\
2.\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k.b_k}{P} &= \frac{2}{P}.P=2
\end{aligned}$$

On a donc obtenu : $\dfrac{A.B}{P^2}+1\geqslant 2$ soit encore $\dfrac{A.B}{P^2}\geqslant 1$ et $A.B\geqslant P^2$ *(car P^2 est positif)*.
On a donc classiquement

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2\right)\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k.b_k\right)^2$$

On a effectué cette démonstration en supposant le produit scalaire $P=\sum_{k=1}^{n}a_k.b_k$ non nul.

Mais s'il est nul, la majoration ultime $P^2\leqslant A.B$ est vraie aussi dans le cas $P=0$ puisque A et B sont positifs.

◁ 6 ▷

Un élève affirme pour les applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que c'est faux :

$\left.\begin{matrix} f & \textit{injective}\\ g & \textit{injective}\end{matrix}\right\}\Rightarrow f+g$ *injective*	f *injective* $\Rightarrow f'$ *injective*	$\left.\begin{matrix} f & \textit{injective}\\ g & \textit{injective}\end{matrix}\right\}\Longleftrightarrow g\circ f$ *bijective*
$\left.\begin{matrix} f & \textit{injective}\\ g & \textit{injective}\end{matrix}\right\}\Rightarrow f\times g$ *injective*	f' *injective* $\Rightarrow f$ *injective*	

En général, il suffit de donner le nom de l'élève pour prouver que c'est faux, non ?

On va quand même préférer donner des contre-exemple. Les applications vérifieront la première partie (avant l'implication) mais pas le seconde (après l'implication).

assertion	contre-exemple
$\left.\begin{matrix} f & \textit{injective}\\ g & \textit{injective}\end{matrix}\right\}\Rightarrow f+g$ *injective*	$f=x\longmapsto x$ $g=x\longmapsto -x$
vérification	L'application identité est injective ainsi que ses multiples non nuls. Une application constante ne l'est plus.

assertion	contre-exemple
f *injective* $\Rightarrow f'$ *injective*	$f=x\longmapsto x$
vérification	L'application identité est injective. Une application constante ne l'est plus.

assertion	contre-exemple
$\left.\begin{matrix} f & \textit{injective}\\ g & \textit{injective}\end{matrix}\right\}\Longleftrightarrow g\circ f$ *bijective*	$f=x\longmapsto x$ de $[-1,\ 1]$ dans lui même. $g=x\longmapsto x$ de $[-1,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$
vérification	Bijective n'a pas de sens si on ne dit pas de quoi dans quoi.

assertion	contre-exemple
$\left.\begin{matrix} f & \textit{injective}\\ g & \textit{injective}\end{matrix}\right\}\Rightarrow f\times g$ *injective*	$f=x\longmapsto x$ $g=x\longmapsto x$
vérification	L'application identité est injective. $x\longmapsto x^2$ ne l'est plus (même valeur en 1 et -1).

assertion	contre-exemple
f' *injective* $\Rightarrow f$ *injective*	$f=x\longmapsto x^2$
vérification	Toujours la parabole et Id. Un jour, Jésus dit à ses disciples « $a.x^2+b.x+c$ ». C'était une parabole.

◃7▹ L'application $(a,\ b) \longmapsto (a+b,\ a^2+b^2,\ 1_{a<b})$ est elle injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$?
Est elle surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \{0,\ 1\}$?
Rappel : $1_{a<b} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & si & a<b \\ 0 & sinon & \end{array} \right| .$

Sens direct, à un couple de réels, on associe leur somme et la somme des carrés, plus un indicateur de « qui est le plus petit ».
C'est une application.

Sens réciproque.
Injectivité : si on connaît la somme et la somme des carrés, connaît on les deux nombres sans ambigüité, ou y a-t-il plusieurs solutions ?

Surjectivité : peut on atteindre tout couple de $\mathbb{R}^2$, ou bien est ce il y a des contraintes du style « si la somme vaut 12, la somme des carrés ne pourra jamais atteindre 1 ! ».

Injectivité.

On suppose que $(a,\ b)$ et $(\alpha,\ \beta)$ ont le même triplet image.
On déduit $a+b=\alpha+\beta$, $a.b=\alpha.\beta$ et $1_{a<b}=1_{\alpha<\beta}$.
Le couple $(a,\ b)$ est formé des deux racines de l'équation $X^2-(a+b).X+(a.b)$.
Et $(\alpha,\ \beta)$ est solution de la même équation.
Mais on pourrait avoir $(a,\ b)=(\beta,\ \alpha)$ et pas seulement $(a,\ b)=(\alpha,\ \beta)$.
Mais l'égalité des deux indicatrices impose que a et b soient dans le même ordre que $(\alpha,\ \beta)$.
On ne garde que $(a,\ b)=(\alpha,\ \beta)$.

Sans cette « indicatrice », $(1,\ 2)$ et $(2,\ 1)$ auraient la même image $(3,\ 2)$.
Mais ici, l'un pour image $(3,\ 2,\ 1)$ et l'autre $(3,\ 2,\ 0)$.
Ou si vous préférez $(3,\ 2,\ True)$ et $(3,\ 2,\ False)$.

◃8▹ Vrai ou faux : si f est injective de $]-\infty,\ 0]$ dans $\mathbb{R}$ et de $]0,\ +\infty[$, alors elle est injective de $]-\infty,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$

Évidemment totalement faux.
Prenons la valeur absolue.
- Elle est injective sur $]-\infty,\ 0[$ (c'est $-Id$)
- Elle est injective sur $[0,\ +\infty[$ (c'est Id)
- Elle n'est pas injective sr $\backslash R$ (1 et -1 ont la même image).

C'est évident. mais alors dites moi pourquoi quand ce n'est pas la question explicitement posée, des élèves trouvent le moyen de dire
« f est injective sur A et sur B, donc sur $A\cup B$ ».
J'ai bien ma petite idée, mais elle serait désobligeante.
- Ces élèves sont cons.
- Ces élèves rédigent des trucs qui ont l'air de maths, sans chercher à savoir ce qu'ils font, juste « ça ressemble à ce que dit un livre ».
- Ces élèves croient que faire des maths, c'est aligner des formules qui sonnent bien, et pas raisonner.
- Ces élèves veulent conclure à tout prix, quitte à écrire n'importe quoi.

Bref ce sont des élèves. mais pas des ingénieurs.

◃9▹ Montrez que $x \longmapsto x^2+\pi.x+2$ est injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser sans preuve que π est irrationnel)..

On se donne a et b rationnels.
On suppose $f(a)=f(b)$ (objectif : $a=b$).

On obtient $(a-b).(a+b+\pi)=0$ après calculs.
Le terme $a+b+\pi$ ne peut être nul *(sinon π serait le rationnel $-a-b$).*
Par intégrité, $a-b$ est nul.

On a utilisé ici la forme « $f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$ ».
Elle est bien équivalente à « $a\neq b \Rightarrow f(a)\neq f(b)$ ».

◃10▹ Montrez que l'application $n \longmapsto [n]$ n'est ni injective ni continue sur $\mathbb{R}^+$.
Montrez que l'application $n \longmapsto (n-[n]).([n]+1-n)$ est continue mais non injective sur $\mathbb{R}^+$.
Montrez $n \longmapsto n.(n-[n]).([n]+1-n)+n^2$ est continue et injective sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction partie entière prend plusieurs fois la même valeur : $[0] = [0,1]$. Ceci est un contre-exemple pour l'injectivité.

Elle est continue en bien des points, mais elle n'est pas continue en 1 par exemple.
On a en effet $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}[x] = 0 \neq [1] = 1$ *(égale quand même à* $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}[x]$*)*.

On dira que la partie entière est une application càdlàg (en tout point elle est continue à droite et admet une limite à gauche, éventuellement différente de sa limite à gauche).

C'est quoi ce $n \longmapsto (n-[n]).([n]+1-n)$?
Déjà, ce qui est trompeur, c'est que la variable réelle s'appelle n (nom qu'on réserve plutôt aux entiers).
Si le réel n s'écrit $n = p+d$ avec p entier et d entre 0 et 1, on a alors

$$f(p+d) = (p+d-[p+d]).([p+d]+1-p-d)$$

$$f(p+d) = (p+d-p).(p+1-p-d)$$

$$f(p+d) = d.(1-d)$$

(pourquoi pas).
Par exemple : $f(1,1) = 0,1 \times 0,9 = 0,09$
$f(3,1) = 0,1 \times 0,9 = 0,09$
$f(2,4) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$
et ainsi de suite.
La disparition de p nous incite à dire que cette application est périodique, donc non injective.
D'ailleurs, $f(1,1) = f(3,1)$ est un contre-exemple.

> *Si vous avez pris le même que moi, c'est vraiment le hasard.*
> *En général, les élèves se contentent de dire « périodique donc non injective ». Mais un vrai contre-exemple est toujours attendu par le matheux, car il est rigoureux.*

Cette application est continue en tout point, alors même qu'elle contient une partie entière.
Plaçons nous en un point p entier. A droite, on a $f(x) = d.(1-d)$ avec $x = p+d$ et d qui va tendre vers 0.
$f(x)$ tend vers 0.
A gauche, on a $f(x) = f(p-1+d)$ avec d qui va tendre vers 1 par valeur inférieure.

On a quand même $f(x) = d.(1-d)$ et $f(x)$ tend vers 0.
La limite à droite est égale à la limite à gauche, et elles coïncident avec la valeur de la fonction, elle est continue.

En un point x non entier, l'application est localement définie par une formule simple et continue. L'application est continue.

> *Le seul problème était en effet aux points de raccordement.*

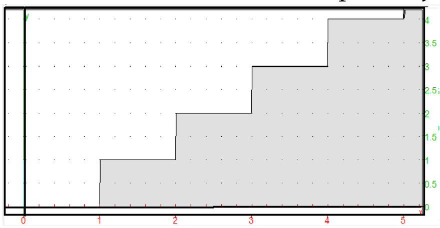
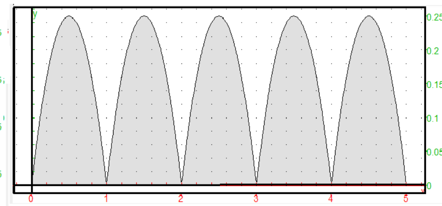
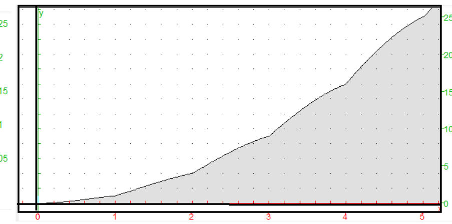
Et à présent $n \longmapsto n.(n-[n]).([n]+1-n)+n^2$.
gardons nos notations $n = p+d$ avec p entier et d dans $[0,\ 1[$.
On a alors (en l'appelant encore f) : $f(x) = f(p+d) = (p+d).d.(1-d)+(p+d)^2$.
On développe et il reste un truc laid.
Mais il suffit de regarder intervalle par intervalle.
Sur $[p,\ p+1[$, on a $x \longmapsto x.(x-p).(p+1-x)+x^2$.

On constate que cette application est strictement croissante sur $[p,\ p+1[$.
En p, elle vaut p^2.
En $p+1$ à gauche, elle tend vers $(p+1)^2$.

La continuité sur chaque $]p,\ p+1[$ est acquise.

La continuité en $p+1$ est acquise aussi : limite à gauche $(p+1)^2$
valeur et limite à droite $(p+1)^2$ aussi.

Par raccordement en chaque entier, la croissante « sur chaque intervalle » se transmet à croissante sur tout $\bigcup_p [p,\ p+1[$ qui donne $\mathbb{R}^+$.
Pour s'en convaincre en comparant $f(3,5)$ et $f(5,7)$: $f(3,5) < f(4) < f(5) < f(5,7)$.

◁11▷ L'application $x \longmapsto x^x - x$ est elle injective (sur $\mathbb{N}$ ou sur $\mathbb{R}^+$? oui, c'est à la question).

Sur $\mathbb{N}$, on calcule les valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	et ainsi de suite
n^n	1	1	4	27	256	beaucoup	
$n^n - n$	1	0	2	24	252		

Les premières valeurs sont toutes distinctes.
Et ensuite, elle croît strictement.
Elle ne reprendra jamais les mêmes valeurs.
Elle est injective.

J'espère que vous avez calculé des valeurs au lieu de vous lancer dans la résolution de $a^a - a = b^b - b$ qui est quasiment impossible.
La définition du cours directement appliquée, c'est bien, mais quand ça semble trop lourd, on essaye des trucs à la main.
On remplace les équations « $f(a) = f(b)$ » par des raisonnements « peut on retrouver la même valeur ».
C'est en ce sens que les maths sont peut être plus difficiles que les matières où le chemin est balisé par des théorèmes et principes à appliquer qui conduisent toujours au résultat.

Dérivons la.
$(x \longmapsto e^{x.\ln(x)} - x)' = (x \longmapsto (1+\ln(x)).e^{x.\ln(x)} - 1)$
C'est moche.
Mais en tout cas, elle est dérivable et continue.
En 0 elle commence par la valeur 1.
Entre 1 et 2 elle repasse de 0 à 2. Par théorème des valeurs intermédiaires, elle repassera par la valeur 1.
On a donc un a de $[1,\ 2]$ vérifiant $f(a) = 1 = f(0)$. Défaut d'injectivité sur $\mathbb{R}$.

Là encore, du raisonnement, et pas de calcul.
La meilleure chose à faire était de déjà représenter le graphe sur une calculatrice.

Avouez que la langue française est ambigüe : Les poules du couvent couvent. Il est de l'Est. Nous portions les portions de fils de fer à leurs fils. Les gens au caractère violent violent leur promesses. Dans cet affluent, les poissons affluent. Peut on se fier à un homme fier ?

◁12▷ ♡ Donnez une primitive de $t \longmapsto \sin(\ln(t))$ sur $]0,\ +\infty[$.

On doit calculer $\int_a^b \sin(\ln(t)).dt$ pour a et b dans $]0,\ +\infty[$

et pas $\int_0^{+\infty} \sin(\ln(t)).dt$ *comme le croient les élèves qui confondent intégrale et primitive.*

On change de variable : $x = \ln(t)$ (et $t = e^x$) : $\int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \sin(x).e^x.dx$.

On intègre deux fois par parties.

Ou on intègre a priori : On propose $x \longmapsto (\alpha.\sin(x)+\beta.\cos(x)).e^x$.
On dérive $x \longmapsto ((\alpha-\beta).\sin(x)+(\alpha+\beta).\cos(x)).e^x$ *(calcul direct, c'est bon, non ?)*
On identifie *(simple condition suffisante)* : $\alpha-\beta=1$ et $\alpha+\beta=0$.
On a donc $x \longmapsto \frac{(\sin(x)-\cos(x))}{2}.e^x$ qu'on pouvait proposer et vérifier.

On a notre primitive, mais il faut revenir en variable t : $\boxed{t \longmapsto \dfrac{\sin(\ln(t))-\cos(\ln(t))}{2}.t}$

Vérifiable.

◃13▹ En arrivant à la caisse de votre magasin, vous constatez que vous avez deux tickets pour des réductions : l'un d'une valeur de dix euros, et l'autre qui donne droit à dix pour cent de réduction. Dans quel ordre les présentez vous ?

D'abord les 10 pour cent, puis les dix euros.
On a en effet $\dfrac{90}{100}.p-10<\dfrac{90}{100}.(p-10)$. Même si p est négatif.

Remarque : *En revanche, on sait bien que $\frac{90}{100}.\left(\frac{75}{100}.p\right)=\frac{75}{100}.\left(\frac{90}{100}.p\right)$. Si vous avez deux réductions du type « 90 pour cent » et « vingt cinq pour cent », l'ordre de présentation n'a pas d'importance.*
Illustration classique de la commutativité de la multiplication. Pourquoi ne pas l'enseigner au collège.
Ou plutôt si, elle est dans les livres dans des exercices, mais le cours de maths, ça reste « il faut apprend des trucs par cœur pour le contrôle pour avoir une bonne note ».

◃14▹ Résolvez le système $\left\{\begin{array}{rcl} 8^x & = & 10.y \\ 2^x & = & 5.y \end{array}\right.$ d'inconnues réelles x et y.

x et y ont le droit d'être réels, et y est même strictement positif.
On raisonne par équivalences en effectuant le quotient des deux lignes et en en gardant une[3] :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 8^x & = & 10.y \\ 2^x & = & 5.y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 8^x/2^x & = & 2 \\ 2^x & = & 5.y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4^x & = & 2 \\ 2^x & = & 5.y \end{array}\right.$$

On résout la première : x vaut $\dfrac{1}{2}$ et on reporte dans la seconde : y vaut $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

La conclusion attendue n'est pas un nombre ici et un nombre là mais $\boxed{S_{(x,y)}=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{5}\right)\right\}}$ un seul élément, un couple.
Mots clefs : équivalences.

◃15▹ ♣ Une application f de A dans B est dite bibijective si set seulement si chaque élément de B a exactement deux antécédents dans A.
Pourquoi la quantification n'est elle pas $\forall b\in B,\ \exists!(a,\ \alpha)\in A^2,\ f(a)=f(\alpha)=b$.
Un élève dit que la composée de deux application bibijectives ne peut pas être bibijective, car tout élément va avoir quatre antécédents par la composée et non pas deux. Et pourtant, il y a un cas...
Montrez que si f est bibijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors il existe φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $f\circ\varphi=Id_{\mathbb{N}}$.

Si la quantification $\forall b\in B,\ \exists!(a,\ \alpha)\in A^2,\ f(a)=f(\alpha)=b$ semble indiquer que tout élément b a juste deux antécédents, elle indique en fait qu'elle en a un ou deux.
On a au moins un antécédent a. Mais le second α peut être égal à a.
La bonne quantification sera

$$\forall b\in B,\ \exists!(a,\ \alpha)\in A^2,\ (a\neq\alpha)\ et\ f(a)=f(\alpha)=b$$

L'application vide de l'ensemble vide dans lui même est bien une application (aucun élément sans image).
Et elle est bibijective, puisque $\forall b\in\emptyset,\ldots$ est toujours vrai (allez me trouver un élément de l'ensemble vide n'ayant pas d'antécédent, ou en ayant trop...).

> *Sinon, si nos ensembles ne sont pas vides (et même si ils le sont), on a une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une bibijection de A dans B : $Card(A)=2.Card(B)$.*
> *Et si on compose les bibijections, les cardinaux sont divisés par 2 à chaque étape, et on ne peut plus aller de A dans C bibijectivement.*

3. tout le gain de ces exercices sera pour vous de comprendre que vous devez raisonner par équivalences et non balancer des formules les unes à la suite des autres ; la partie calcul n'est qu'accessoire.

Si les ensembles sont infinis, on peut ne plus se préoccuper du cardinal.
On nous donne f bibijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On ne sait pas qui sait, on sait juste que chaque élément b de $\mathbb{N}$ a exactement deux antécédents.

Ça existe ça ? Oui, j'ai l'application $n \longmapsto [n/2]$.

Et explicitement, c'est

0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	0	1	1	2	2	3	3	4	...

Mais je n'ai pas le droit de dire que f est celle ci.

On veut construire φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\forall a \in \mathbb{N},\ f(\varphi(b)) = b$.

Ici, redescendre à l'étage des entiers est judicieux, ça permet de voir ce qu'on veut obtenir case par case.
Et choisir un nom de variable b plutôt que n peut nous mettre sur la piste.

Pour b donné, $\varphi(b)$ doit être un élément de $\mathbb{N}$ dont l'image par f est b.
C'est donc un antécédent de b.
Il suffit d'en choisir un, arbitrairement[4], parmi les deux antécédents de b.
Formellement $\varphi(b) = Min(a \in \mathbb{N} \mid f(a) = b\}$ (minimum d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$).

◁16▷ ♣ Bintou se isiro $n!$ =40526...481280000000000000 (o nilo pupo ti akoko lati kọ) ati $(n+1)!$ =2350561...914240000000000000. O ni lati wa nọmba naa n ? Salaye. C'est du yorouba *(langue du Nigeria, Bénin, Togo, Côte d'Ivoire...)*. J'espère que vous comprenez qu'on vous demande de retrouver n à partir de $n!$ et $(n+1)!$.

Combien de 0 dans l'écriture de $n!$? C'est un bon indice.
$n!$ a 13 chiffres 0 au bout. Et $(n+1)!$ en a autant.
On n'a donc multiplié ni par 5 ni par un de ses multiples.
$n+1$ n'est pas multiple de 5.

Pour avoir 13 zéros au bout : $55 \leqslant n < 60$.

On rappelle en effet :

1	2	3	4	5	6	...	10	...	15	...	20	...	25	...	30	...	35	...	40	...	45	...	50	...	55
				1			+1		+1		+1		+2		+1		+1		+1		+1		+2		+1

Comment choisir ?
Regardons le « chiffre des unités », u plutôt le chiffre après les 0.
Dans $n!$ c'est un 8.
Et quand on multiplie par $n+1$ ça devient un 4.
C'est à dire que si on multiplie 8 par le chiffre des unités de $n+1$ on doit obtenir 4.
Le chiffre des unités de $n+1$ est donc un 8.

On a retrouvé : $\boxed{n = 57 \text{ et } n+1 = 58}$

Et avec l'aide de Python :
$57! = 40526919504877216755680601905432322134980384796226602145184481280000000000000$
puis $58! = 2350561331282878571829474910515074683828862318181142924420699914240000000000000$.

◁17▷ ♣ Résolvez $\Re e\Big((e^e)^{i.\theta}\Big) \geqslant 0$ d'inconnue réelle θ.

On écrit $(e^e)^{i.\theta} = e^{i.(e.\theta)}$.
L'inéquation devient : $\cos(e.\theta) \geqslant 0$.
Une solution « de base » est $e.\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. mais les intervalles translatés de $2.\pi$ complètent S.

On a donc après division : $S_{e.\theta} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left[\frac{(2.k-1).\pi}{2}, \frac{(2.k+1).\pi}{2}\right]$ puis $\boxed{S_\theta = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left[\frac{(2.k-1).\pi}{2.e}, \frac{(2.k+1).\pi}{2.e}\right]}$

4. un choix arbitraire sur un ensemble fini de valeurs, c'est sans difficulté

◃18▹ ♣ On définit φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $\varphi(2^a.3^b.5^c.7^d.11^e\dots) = 2^{-a}.3^b.5^c.7^d.11^e\dots$ et $\varphi(0) = 0$ puis on définit la relation $\trianglelefteq$ par $a \trianglelefteq b \Leftrightarrow \varphi(a) \leqslant \varphi(b)$.
Montrez que c'est une relation d'ordre et que 0 en est le plus petit élément.
Montrez que la suite $(n!)$ n'est ni croissante ni décroissante pour $\trianglelefteq$.
Montrez que la suite (p_n) des nombres premiers est croissante.
Montrez : $\forall(a,b,c),\ a \trianglelefteq b \Rightarrow a.c \trianglelefteq b.c$.
A-t-on $\forall(a,b,c),\ a \trianglelefteq b \Rightarrow a+c \trianglelefteq b+c$.
Un entier peut il être plus petit que tous ses diviseurs ?
Combien y a-t-il d'entiers entre 2020 et 2021 ?

φ transforme les entiers en rationnels, en changeant la valeur de l'exposant de 2.
Par exemple $\varphi(12) = \dfrac{3}{4}$ et $\varphi(120) = \dfrac{3.5}{8}$.
Une fois donnés des entiers, on calcule leurs images, on les trie pour l'ordre usuel, et voilà nos entiers triés pour notre ordre,si c'en est bien un.
A titre d'exemple, on calcule :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\varphi(n)$	0	1	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{4}$	5	$\frac{3}{2}$	7	$\frac{1}{8}$	9	$\frac{5}{2}$	11	$\frac{3}{4}$	13	$\frac{7}{2}$	15	$\frac{1}{16}$	17

Puis on trie

n	0	16	8	4	2	12	1	6	10	3	14	5	7	9	11	13	15	17
$\varphi(n)$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	5	7	9	11	13	15	17

Et voilà le travail :

n	0	16	8	4	2	12	1	6	10	3	14	5	7	9	11	13	15	17

C'est un peu n'importe quoi. Mais on devine déjà des choses.
A compléter.

.	Une relation sur un ensemble est "formellement" une application de $E \times E$ dans $\{Vrai,\ Faux\}$. Pratiquement, on prend deux éléments a et b, et on dit si a est ou non en relation avec b ($a\Re b$).
Réflexive	Tout élément est en relation avec lui même $\forall a \in E,\ a\Re a$
Transitive	Les flèches se mettent bout à bout. $\forall(a,\ b,\ c) \in E^3,\ (a\Re b\ et\ b\Re c) \Rightarrow (a\Re c)$
Antisymétrique	Il ne peut pas y avoir de flèches dans les deux sens $\forall(a,\ b) \in E^2,\ (a\Re b\ et\ b\Re a) \Rightarrow (a = b)$ Ce n'est pas la négation de "symétrique".
Symétrique	Il y a une flèche à l'aller il y a une flèche au retour $\forall(a,\ b) \in E^2,\ (a\Re b) \Rightarrow (b\Re a)$
Ordre $\leqslant, \subset, \Rightarrow$	Relation réflexive, antisymétrique et transitive un ordre peut être total ($\forall(a,b),\ a \ll b\ ou\ b \ll a$) ou partiel ($\exists(a,b),\ a \not\ll b\ et\ b \not\ll a$)
Équivalence $=, \equiv, \Leftrightarrow$	Relation réflexive, symétrique et transitive la classe d'équivalence d'un élément a est l'ensemble des éléments en relation avec a : $Cl(a) = \{\alpha \in E \mid \alpha\Re a\}$

◃19▹ Sachant $a + b.\sqrt[3]{5} + c.\sqrt[3]{25} = \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}$ calculez la somme des trois rationnels a, b et c.

On part d'un lot de deux informations : $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}} = a + b.\sqrt[3]{5} + c.\sqrt[3]{25}$
a, b et c sont trois rationnels
(ah oui, il faut tout lire dans l'énoncé).

On effectue un produit en croix *(plutôt que de chasser les dénominateurs par conjugaison).*
$(1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}).(a + b.\sqrt[3]{5} + c.\sqrt[3]{25}) = 1$

	a	$+b.\sqrt[3]{5}$	$+c.\sqrt[3]{25}$
1	a	$+b.\sqrt[3]{5}$	$+c.\sqrt[3]{25}$
$+\sqrt[3]{5}$	$+a.\sqrt[3]{5}$	$+b.\sqrt[3]{25}$	$+c.5$
$+\sqrt[3]{25}$	$+a.\sqrt[3]{25}$	$+b.5$	$+c.5.\sqrt[3]{5}$

On développe et regroupe
(sachant $\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{25}=5$, $\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{25}$ et $\sqrt[3]{25}.\sqrt[3]{25}=5.\sqrt[3]{5}$) :
$(a+5.b+5.c).1+(a+b+5.c).\sqrt[3]{5}+(a+b+c).\sqrt[3]{25}=1$

On identifie : $\begin{array}{ccccc} a & +5.b & +5.c & = & 1 \\ a & +b & +5.c & = & 0 \\ a & +b & +c & = & 0 \end{array}$.

On résout ce système par exemple en inversant la matrice.

Ou par combinaisons : $\begin{array}{cccccc} a & +5.b & +5.c & = & 1 & (a) \\ a & +b & +5.c & = & 0 & (b) \\ a & +b & +c & = & 0 & (c) \end{array}$ puis $\begin{array}{cccccc} a & +5.b & +5.c & = & 1 & (a) \\ a & +b & +5.c & = & 0 & (b) \\ & 4.b & +4.c & = & 1 & (a)-(c) \end{array}$

puis $\begin{array}{cccccc} a & & & = & -1/4 & (a)-5.(c') \\ a & +b & +5.c & = & 0 & (b) \\ & b & +c & = & 1/4 & (c') \end{array}$ et même $\begin{array}{cccccc} a & & & = & -1/4 & (a') \\ & b & +5.c & = & 1/4 & (b)-(a') \\ & b & +c & = & 1/4 & (c') \end{array}$

et enfin $\begin{array}{cccccc} a & & & = & -1/4 & (a') \\ & -4.b & & = & -1/4 & (b')-5.(c') \\ & b & +c & = & 1/4 & (c') \end{array}$. Bref : $a=-\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{4}$ et $c=0$.

La somme $a+b+c$ est nulle ! Cela dit, la troisième ligne du système l'offrait.

Il reste une ambigüité : pouvait on identifier ?
La formule $\alpha+\beta.\sqrt[3]{5}+\gamma.\sqrt[3]{25}=0$ avec α, β et γ rationnels implique-t-elle $\alpha=\beta=\gamma=0$?

Ce dont on est sûr : $(\alpha=\beta=\gamma=0)\Rightarrow(\alpha+\beta.\sqrt[3]{5}+\gamma.\sqrt[3]{25}=0)$.
Mais l'autre sens ?

Rappel : *Par exemple* $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}^2,\ (\alpha+\beta.\sqrt{5}=0)\Rightarrow(\alpha=\beta=0)$
$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}^2,\ (\alpha+\beta.\pi=0)\Rightarrow(\alpha=\beta=0)$
$(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ (\alpha+\beta.\sqrt{5}=0)$ *n'implique pas* $(\alpha=\beta=0)$
$(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}^2,\ (\alpha+\beta.\dfrac{2}{3}=0)$ *n'implique pas* $(\alpha=\beta=0)$

Mais $\sqrt[3]{5}$ est quand même irrationnel. Et $\sqrt[3]{25}$ aussi.
On verra plus tard qu'ils forment une famille libre dans $(\mathbb{R},+,.)$ vu comme $\mathbb{Q}$−espace vectoriel.

◃20▹

♡ Pour tout n, on pose $a_n=(1+\sqrt{3})^{2.n+1}$ et $b_n=(1-\sqrt{3})^{2.n+1}$.
a - Montrez : $0\geqslant b_n>-1$.
On pose $S_n=a_n+b_n$ pour tout n.
b - Montrez que la suite (S_n) est une suite d'entiers et vérifie $\forall n,\ S_{n+2}=8.S_{n+1}-4.S_n$.
c - Montrez que S_n est toujours divisible par 2^{n+1}.
d - Montrez : $S_n\leqslant a_n<S_n+1$.
e - Déduisez que la partie entière de a_n est toujours divisible par 2^{n+1}.

a - $1-\sqrt{3}$ est négatif. On l'élève à une puissance impaire. Il reste impair.
$\sqrt{3}-1$ est entre 0 et 1. On l'élève à une puissance positive. Il reste entre 0 et 1. On remet le signe moins, c'est bon.

---

b - Que chaque S_n soit entier ne saute pas aux yeux.

Ah oui, tiens, ça fait partie de la question ! Entier.
Combien auraient perdu des points là dessus ?
Et combien d'élèves seraient passés devant vous aux concours ?

Mais changeons l'ordre. Pour n donné, calculons S_{n+2} et $8.S_{n+1}-4.S_n$ en factorisant $a_n$et b_n :

$$S_{n+2}=(1+\sqrt{3})^{2.n+5}+(1-\sqrt{3})^{2.n+5}=(1+\sqrt{3})^4.(1+\sqrt{3})^{2.n+1}+(1-\sqrt{3})^4.(1-\sqrt{3})^{2.n+1}$$

On simplifie $S_{n+2}=(28+16.\sqrt{3}).(1+\sqrt{3})^{2.n+1}+(28-16.\sqrt{3}).(1-\sqrt{3})^{2.n+1}$

De même $\begin{array}{ccccccc} -4.S_n & = & -4. & (1+\sqrt{3})^{2.n+1} & -4. & (1-\sqrt{3})^{2.n+1} \\ S_{n+1} & = & (4+2.\sqrt{3}). & (1+\sqrt{3})^{2.n+1} & +(4-2.\sqrt{3}). & (1-\sqrt{3})^{2.n+1} \\ 8.S_{n+1} & = & (32+16.\sqrt{3}). & (1+\sqrt{3})^{2.n+1} & +(32-16.\sqrt{3}). & (1-\sqrt{3})^{2.n+1} \end{array}$

On compare, c'est bon. La relation $S_{n+2}=8.S_{n+1}-4.S_n$ est vraie pour tout n.

Et s'il vous plait, sans récurrence.
C'est ensuite que ceci servira à des récurrences.
On évite le réflexe « entier n donc récurrence ».

Maintenant, on calcule les premiers : $S_0 = 2$ et $S_1 = 20$.
Les deux premiers sont des entiers.
Et ensuite, la formule $S_2 = 8.S_1 - 4.S_0$ dit que S_2est entier.
Et de proche en proche, chaque S_k est un entier.

C'est là qu'il y a une récurrence. Et la formule liant S_{n+2} et S_{n+1} et S_n est celle qui permet à la récurrence d'avancer.

---

c - La divisibilité par 2^{n+1} va se démontrer aussi par récurrence.
Il faut montrer que pour tout n, S_ns'écrit $2^{n+1}.s_n$ pour un entier s_n.
C'est à vus de prendre l'initiative de l'écriture et de l'existence de s_n.
On initialise : $S_0 = 2 = 2^{0+1}.1$ et $S_1 = 20 = 2^{1+1}.5$: $s_0 = 1$ et $s_1 = 5$.

On se donne n et on suppose $S_n = 2^{n+1}.s_n$ et $S_{n+1} = 2^{n+2}.s_{n+1}$.
On calcule : $S_{n+2} = 8.S_{n+1} - 4.S_n = 2^{n+5}.s_{n+1} - 2^{n+3}.s_n$.
On factorise : $S_{n+2} = 2^{n+3}.(4.s_{n+1} - s_n)$.
On décide de poser $s_{n+2} = 4.s_{n+1} - s_n$.
C'est un entier. La propriété est héréditaire.

---

d - La formule $S_n \leqslant a_n < S_n + 1$ se lit aussi $a_n + b_n \leqslant a_n < a_n + b_n + 1$.
C'est donc juste l'encadrement du début sur b_n.

---

e - a_n est coincé entre un entier (S_n) et le suivant ($1 + S_n$) .
Sa partie entière est donc S_n. Et elle est divisible par 2^{n+1}.
A titre d'exemple : a_7 vaut 3526400.00929 *à* 10^{-5}. *Sa partie entière vaut* 3526400 *et c'est* $2^8.13775$.

◃21▹ ♡ Combien l'équation $\cos^2(x) = 2.\cos(x) + 1$ a-t-elle de solutions dans $[0,\ 4.\pi]$? Quelle est la somme de ces solutions ?
Même question avec $\cos^2(x) = 4.\cos(x) + 6$.
Même question avec $6.\cos^2(x) = 4.\cos(x) + 1$.

L'équation $c^2 = 2.c + 1$ a pour solutions réelles $c_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $c_2 1 - \sqrt{2}$. Mais $1 + \sqrt{2}$ dépasse 1, et ne peut être le cosinus de personne.

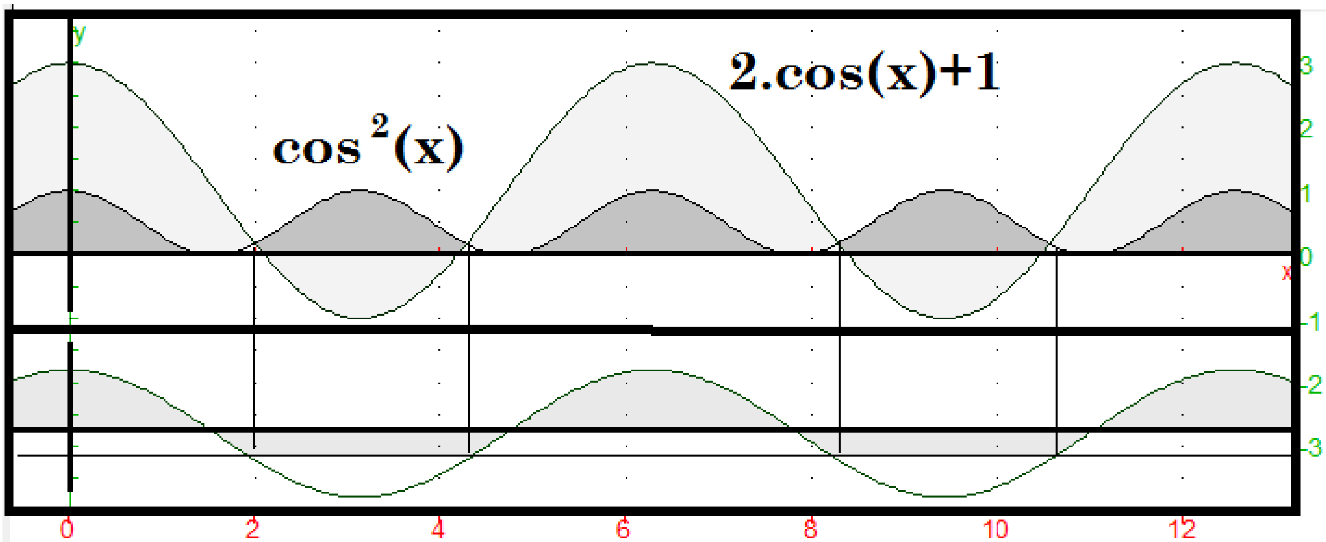
En revanche, $\cos(x) = 1 - \sqrt{2}$ a des solutions. Deux familles de solutions en fait à cause des deux défauts d'injectivité du cosinus

$$\begin{array}{rccc} \{ & Arccos(1-\sqrt{2}) & +2.k.\pi & \mid \ k \in \mathbb{Z} \ \} \\ \cup\{- & Arccos(1-\sqrt{2}) & +2.k.\pi & \mid \ k \in \mathbb{Z} \ \} \end{array}$$

Lesquelles sont entre 0 et $4.\pi$?

$$Arccos(1-\sqrt{2}) \qquad 2.\pi - 1rccos(1-\sqrt{2}) \qquad Arccos(1-\sqrt{2}) + 2.\pi \qquad 4.\pi - Arccos(1-\sqrt{2})$$

Et ce qui est fort, c'est que même si on ne connaît pas la valeur de $Arccos(1 - \sqrt{2})$, la somme des quatre solutions se calcule et vaut $8.\pi$.



◃22▹

f est de classe C^2, nulle en a et b. Montrez
$\left(\int_a^b (f'(t))^2.dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t).f''(t).dt\right)^2 \leqslant \int_a^b (f(t))^2.dt.\int_a^b (f''(t))^2.dt.$

La majoration $\left(\int_a^b f(t).f''(t).dt\right)^2 \leqslant \int_a^b (f(t))^2.dt.\int_a^b (f''(t))^2.dt$ est une inégalité de Cauchy-Schwarz sur les intégrales.

Pour la minoration, on intègre $\int_a^b (f'(t))^2.dt$ par parties en intégrant f' dans un sens, et en le dérivant dans l'autre :

$$\int_a^b f(t).f''(t).dt = \Big[f(t).f'(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t).f''(t).dt$$

Or, l'énoncé dit que f est nulle en a et en b. Le crochet est nul.
Et le carré efface le signe moins.

◃23▹

Mettez sous la forme $t \longmapsto A.\cos(t-\varphi)$ la fonction $t \longmapsto a.\cos(t) + \sqrt{1-a^2}).\sin(t)$ sachant que a est un réel de $]-1,\ 1[$.

On pose $a = A.\cos(\varphi)$ et $\sqrt{1-a^2} = A.\sin(\varphi)$ pour pouvoir écrire $a.\cos(t) + \sqrt{1-a^2}).\sin(t) = A.\cos(t-\varphi)$.
On a très vite $A = 1$ et $\varphi = Arccos(a)$ *(à valeurs entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, donc avec un sinus positif, c'est bon).*

◃24▹

Vous jouez contre Guillaume Deslandes[a]. Sur la table, il y a neuf plaquettes, numérotées de 1 à 9. Chacun prend à tour de rôle une tablette à la fois. Le premier qui a dans ses tablettes trois tablettes dont la somme vaut 15 a gagné.

a. ancien élève de MPSI2, ancien colleur de MPSI2, prof de Prépas à Stan, auteur avec son frère (aussi ancien MPSI2) d'un livre d'énigmes chez Ellipses préfacé par Cédric Villani

Vous voulez gagner à tout prix. Vous commencez ou vous laissez Guillaume entamer ?

Indication :

2	9	
	5	
6		8

Ce jeu est isomorphe (=a la même forme que) au jeu de morpion.
Vous devez vous débrouiller pour que les plaques que vous avez choisies correspondent à un alignement dans le tableau

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Comme au morpion, votre intérêt est donc de commencer par la case du milieu. Vous prenez le 5 et vous réagissez correctement ensuite.
Vous gagnerez.

◁25▷

Voici les notes et totaux de trois élèves au concours de l'**ÉCOLE** **N**ationale **F**édérale d'**O**rnithologie et **I**ngénierie **R**obotique **É**voluée :

élève	français	physique	mathématiques	total
Raiman-Phénomélaaaale	5	4	9	120
Décha-Pourléboufai	2	6	8	114
Endual-N'mi	0	10	11	157

Quelle note aurait du avoir l'élève Endual-N'mi en français pour avoir un total de 200 et être admissible ? Quel total aura un élève qui aura vingt en mathématiques et zéro partout ailleurs.

On donne un nom aux coefficients f, p et m.

On écrit un système $\left\{\begin{array}{cccccc} 5.f & +4.p & +9.m & = & 120 \\ 2.f & +6.p & +8.m & = & 114 \\ & 10.p & +11.m & = & 157 \end{array}\right|$ ou même $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 10 & 11 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} f \\ p \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 114 \\ 157 \end{pmatrix}$.

On résout le système par exemple en exprimant p en fonction de dans la dernière et en remontant .

en inversant la matrice $\begin{pmatrix} f \\ p \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 10 & 11 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 120 \\ 114 \\ 157 \end{pmatrix}$

Français	Physique	Mathématiques
5	8	7

Remarque : *Il arrive qu'à cause d'une erreur, on me propose des coefficients négatifs, et qu'on ne se demande pas si c'est logique.*
Sinon, peut on « proposer/vérifier » ?
Oui, si on a l'assurance qu'il ne peut y avoir qu'une solution.

Sinon, il parait qu'avec un élève fait de -2 fois le premier plus 5 fois le second moins 2 fois le troisième, on récupère clef en main un coefficient !

Il manque à l'élève 43 point coefficient 5. C'est à dire à peu près 9.

◁26▷

Vous calculez $(4+5)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} \binom{2018}{k}.4^k.5^{2018-k}$. Quel est le plus grand nombre dans le membre de droite ?

Le maximum de $k \longmapsto \binom{2018}{k}.4^k.5^{2018-k}$ est atteint quand le quotient $\dfrac{\binom{2018}{k+1}.4^{k+1}.5^{2017-k}}{\binom{2018}{k}.4^k.5^{2018-k}}$ bascule autour de 1.

Ce quotient vaut $\dfrac{8072-4*k}{5+5.k}$.

Tout se passe en 896.

	D		A		B	
C	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	B
	.	.	.	.	.	
			C	C		

	A		B		C	
	.	.	.	.	.	D
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
A	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
		D	D			

Règle du jeu : sur chaque ligne, les lettres de A à D et une case transparente. Et au bout, l'indication de « qui on voit depuis ce bord ».

	A	C		A		
	A	C	D		B	
D	D	B	C	A		A
A		A	B	D	C	
C	C		A	B	D	D
	B	D		C	A	

A vous de jouer :

	D	B		D		
A						D
D						
B						A
					D	

		C		B		
C						
B						D
						A
D						
			B			

	C		A			
B						D
						D
						C
	B					

Tiens, et un programme Python qui vérifie que pour une matrice donnée sous forme de liste de listes comme [[D,B,A,O,C], [A, C, B, D,O], [O,D,C,A,B], [B, O, D, C, A], [C, A, O, B, D]] [a] pour la première que chaque ligne est chaque colonne est bien formée des cinq symboles ?
Et même qui ensuite vous dit même quelle est la première lettre (autre que O) visible depuis chaque extrémité de ligne et/ou de colonne.

a. convention : lettre O pour la case vide

	D	B		D		
	D	B	A		C	
A	A	C	B	D		D
D		D	C	A	B	
B	B		D	C	A	A
	C	A		B	D	
					D	

		C		B		
C		C	A	B	D	
B	B	A	C	D		D
	C	B	D		A	A
D	D		B	A	C	
	A	D		C	B	
			B			

	C		A
B		B	A
	C		D
	A	C	B
	D	A	
	B	D	C
	B		

◁27▷

Vrai ou faux :
Dans $\mathbb{Z}$, pour être un multiple de 12, il faut être un multiple de 4 ou de 3.
Dans le plan, un triangle qui a trois angles droits est équilatéral.
Sur la sphère, un triangle qui a trois angles droits est équilatéral.

multiple de 12	$\Leftrightarrow$	multiple de 3 et multiple de 4	$\Rightarrow$	multiple de 3 ou multiple de 4

L'assertion « Dans $\mathbb{Z}$, pour être un multiple de 12, il suffit d'être un multiple de 4 ou de 3 » aurait été fausse.

Comme un triangle ne peut pas avoir trois angles droits, on a une implication en « Faux implique quelquechose ». Elle est vraie.

En revanche, sur la sphère, on peut avoir trois angles droits. Partez du Pôle Nord, avancez vers le Sud sur un méridien jusqu'à atteindre l'équateur. Tournez de $\pi/2$ et promenez vous sur un quart d'équateur. Repartez alors par un angle de $\pi/2$ vers le Nord. Vous suivez un nouveau méridien. Vous arrivez au Pôle Nord. Votre méridien de retour fait un angle droit avec votre méridien de départ. Au total, trois angles droits. Et un triangle équilatéral...

◁28▷

♡ Résolvez $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ d'inconnue complexe z.

On écrit $z = a + i.b$ avec a et b réels. On a alors $e^z = e^a.e^{i.b}$.
On conjugue : $\overline{e^z} = \overline{e^a.e^{i.b}} = \overline{e^a}.\overline{e^{i.b}} = e^a.e^{-i.b} = e^{a-i.n} = e^{\overline{z}}$.
Mais alors, l'équation est vérifiée pour tous les z de $\mathbb{C}$. On a donc $S = \mathbb{C}$.

A suivre.

◁29▷

♡ Résolvez le système $\left\{\begin{array}{ccccc} 2.\cos(x) & + & 2.\cos(y) & = & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 2.\cos(2.x) & + & 2.\cos(2.y) & = & 1 \end{array}\right|$ d'inconnues réelles x et y.

Quitte à poser $a = \cos(x)$ et $b = \cos(y)$ ce système devient $\left\{\begin{array}{ccccc} 2.a & + & 2.b & = & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 4.a^2-2 & + & 4.b^2-2 & = & 1 \end{array}\right|$.

On arrange en $\left\{\begin{array}{ccccc} 2.a & + & 2.b & = & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 4.a^2 & +8.a.b & +4.b^2 & = & 5+2.\sqrt{6} \\ 4.a^2 & + & 4.b^2 & = & 5 \end{array}\right|$ puis $\left\{\begin{array}{ccccc} 2.a & + & 2.b & = & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ & 4.a.b & & = & \sqrt{6} \\ 4.a^2 & + & 4.b^2 & = & 5 \end{array}\right|$.

Les deux réels $2.a$ et $2.b$ sont racines de $X^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{3}).X + \sqrt{6}$.
Les racines sont évidentes : $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ (somme et produit).

On a donc trouvé (à l'ordre près) : $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos(y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
On trouve une solution $x = \dfrac{\pi}{4}$ et $y = \dfrac{\pi}{6}$.

On vérifie : $\left\{\begin{array}{ccccc} 2.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & + & 2.\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & = & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 2.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & + & 2.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & = & 1 \end{array}\right|$.

Pour $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $\left\{\varepsilon.\frac{\pi}{4} + 2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z},\ \varepsilon \in \{-1,\ 1\}\right\}$
plus digeste que $\left\{\frac{\pi}{4} + 2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{4} + 2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

On termine donc $\boxed{\begin{array}{ll} S_{(x,y)} = & \left\{\left(\varepsilon_1.\dfrac{\pi}{4} + 2.p.\pi,\ \varepsilon_2.\dfrac{\pi}{3} + 2.q.\pi\right) \middle| (\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in \{-1,1\}^2,\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\right\} \\ & \bigcup \quad \left\{\left(\varepsilon_2.\frac{\pi}{3} + 2.q.\pi,\ \varepsilon_1.\frac{\pi}{4} + 2.p.\pi\right) \middle| (\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in \{-1,1\}^2,\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\right\} \end{array}}$

On a alors $S = \left\{\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$ si on n'a rien compris aux maths

$S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right\}$ si on a encore moins compris les maths

$S = \left\{\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right), \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$ si on a un peu mieux compris

$S = \left\{\left(\dfrac{\pm\pi}{6}, \dfrac{\pm\pi}{4}\right), \left(\dfrac{\pm\pi}{4}, \dfrac{\pm\pi}{6}\right)\right\}$ si on a fait quelques progrès

$S = \left\{\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\ mod\ 2.\pi,\ \pm\dfrac{\pi}{4}\ mod\ 2.\pi\right), \left(\pm\dfrac{\pi}{4}\ mod\ 2.\pi,\ \pm\dfrac{\pi}{6}\ mod\ 2.\pi\right)\right\}$ si on a compris mais s'exprime comme un porc

$S = \begin{array}{l} \left\{\left(\varepsilon_1.\dfrac{\pi}{6} + 2.k..\pi,\ \varepsilon_2.\dfrac{\pi}{4} + 2.p.\pi\right) \mid (\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in \{-1,\ 1\}^2,\ (k,\ p) \in \mathbb{Z}^2\right\} \\ \bigcup\left\{\left(\varepsilon_1.\dfrac{\pi}{4} + 2.k..\pi,\ \varepsilon_2.\dfrac{\pi}{6} + 2.p.\pi\right) \mid (\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in \{-1,\ 1\}^2,\ (k,\ p) \in \mathbb{Z}^2\right\} \end{array}$

si on est bon

◃30▹

Les élèves doivent résoudre l'équation $\tan(\theta/2) = 2$.
Le premier trouve $\theta = 2.Arctan(2)$.
Le second écrit $\tan(\theta) = \dfrac{2.2}{1-(2)^2}$ par les formules en arc moitié. Il trouve $Arctan(-4/3)$.
Qui a raison ?

Les deux ont tort. Il manque les congruences.

$\tan(\theta/2) = 2$ équivaut à $\dfrac{\theta}{2} = Arctan(2)\ [\pi]$ et donne $S = \{2.Arctan(2) + 2.k.\pi\}$.

$\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 2$ implique $\tan(\theta) = \dfrac{4}{1-4}$. Mais c'est une implication, pas une équivalence.
En effet, $\tan(\theta) = -4/3$ peut remonter aussi sur $\tan(\theta/2) = -1/2$.

Ensuite, $\tan(\theta) = -4/3$ donne $\theta = Arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + k.\pi$.

Cette équation a deux solutions par intervalle de longueur $2.\pi$ tandis que l'équation initiale n'en avait qu'une.
C'est la faute à la « non équivalence ».

◃31▹

♣ Vous donnez des cours à un élève de Terminale. Il a naïvement écrit $\cos(3.x) = \cos^3(x)$. Prouvez lui qu'il a tort.
Mais tout à coup, vous vous souvenez que ses parents vous payent cher. Trouvez alors toutes les valeurs de x pour lesquelles sa formule est valable, et faites la somme de ces valeurs de x sur $[-13.\pi;\ 13.\pi]$.
La semaine suivante, il a écrit dans un grand effort $\cos(3.x) = 3 \times \cos(x)$. Cette fois encore, pour faire plaisir à sa sœur à qui vous espérez donner des cours de biologie expérimentale, trouvez le nombre de solutions entre 0 et $6.\pi$, et faites la somme de ces solutions.
Encore une semaine passe, et cette fois, il écrit $3 \times \cos(3.t) = cos^3(t)$. Décidément. Mais son grand frère a des gros muscles et vous regarde avec animosité (ou au contraire avec lubricité), alors faites encore un effort : le nombre de valeurs de t entre 0 et $6.\pi$ pour lesquelles c'est vrai, et leur somme.

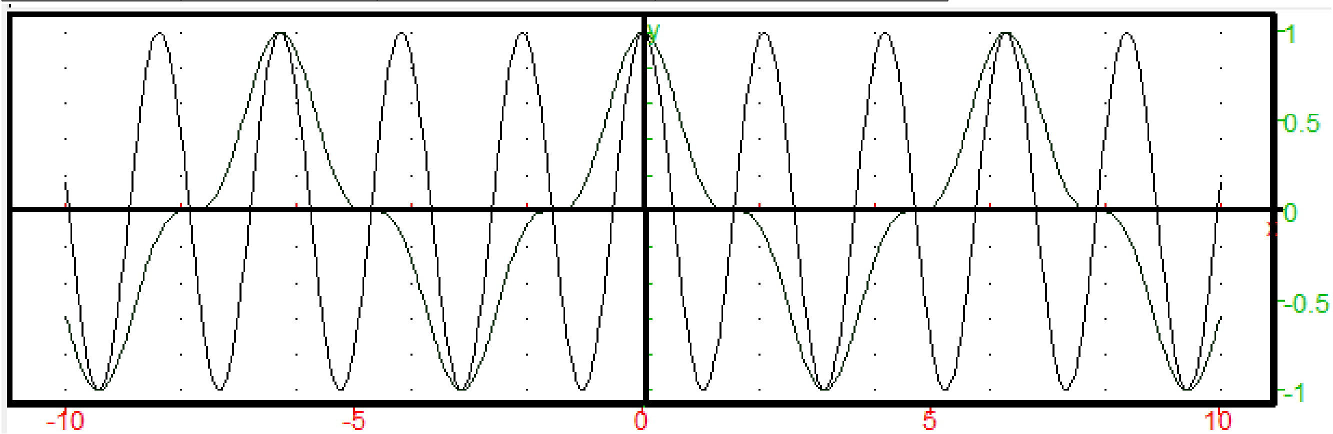
Dans chacune des situations, on commencera par donner un contre-exemple.
Ensuite, on posera $c = \cos(x)$ et on utilisera la formule (vraie) $\cos(3.x) = 4.c^3 - 3.c$.

La relation $\cos(3.x) = \cos^3(x)$ est erronée en $\dfrac{\pi}{6}$.

La résolution conduit à $4.c^3 - 3.c = c^3$.
On trouve $c.(c^2 - 1) = 0$.

On a trois familles de solutions. On extrait les solutions entre $-13.\pi$ et $13.\pi$.

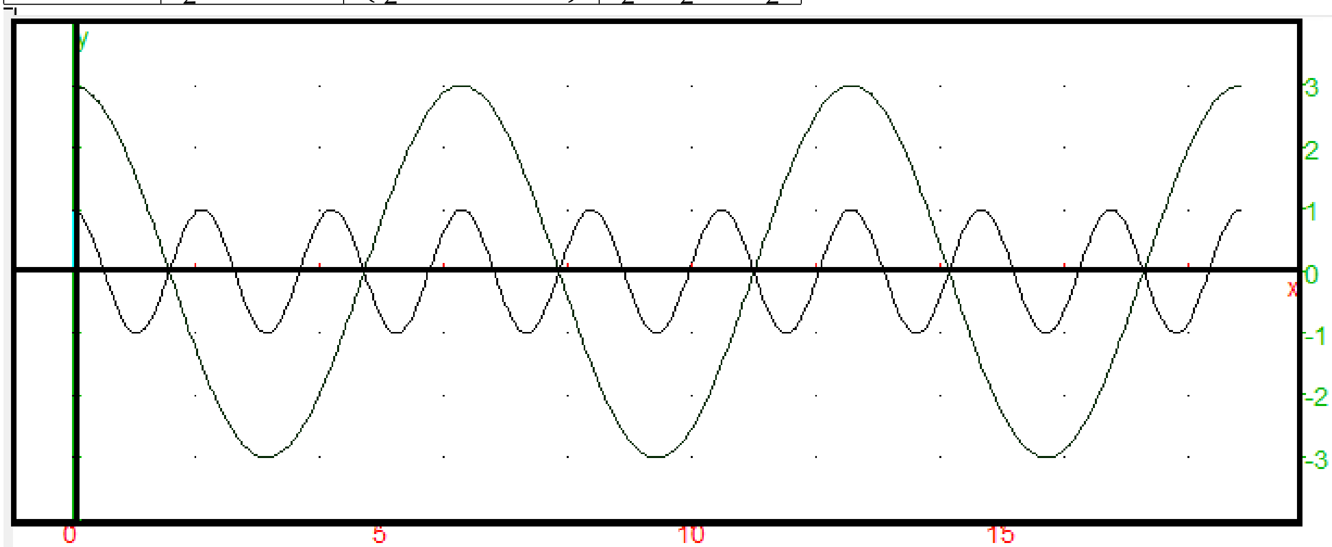
$\cos(x) = 0$	$\dfrac{\pi}{2}$ modulo π	$\left\{\dfrac{\pi}{2} + k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$-25.\dfrac{\pi}{2}, -23.\dfrac{\pi}{2}, \dots 25.\dfrac{\pi}{2}$
$\cos(x) = 1$	0 modulo $2.\pi$	$\{2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$-12.\pi, -10.\pi, \dots 12.\pi$
$\cos(x) = -1$	π modulo $2.\pi$	$\{(2.k+1).\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$-13.\pi, -11.\pi, \dots 13.\pi$



Pour la somme, chaque solution positive a son opposé dans la liste.
La somme est nulle !

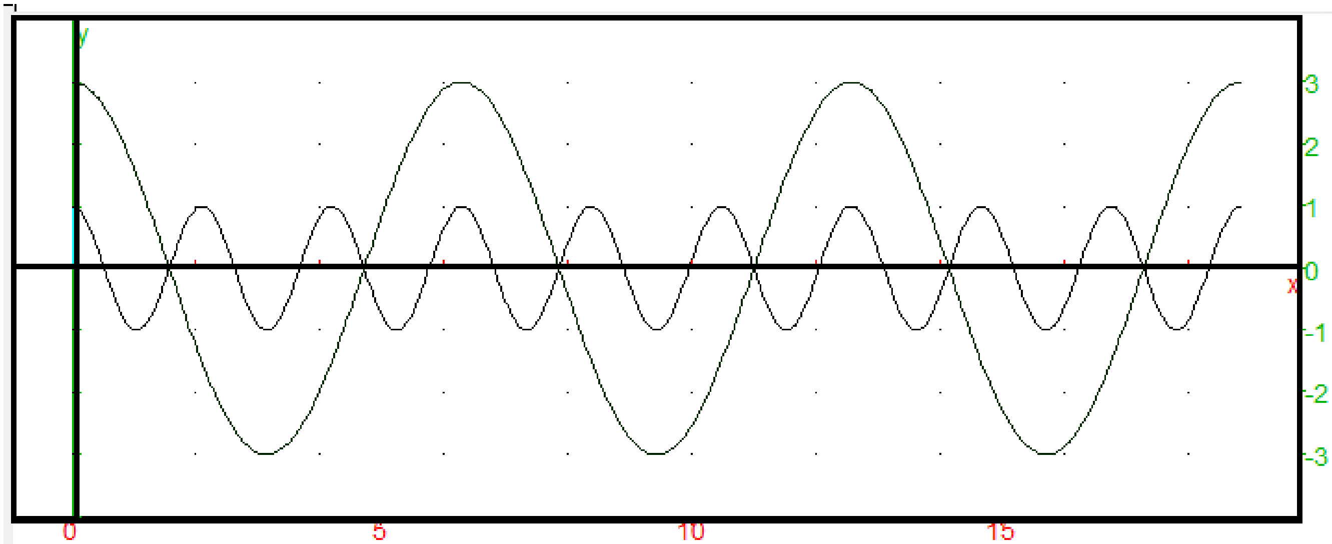
$\cos(3.x) = 3 \times \cos(x)$ est fausse en 0.
On résout $4.c^3 - 3.c = 3.c$.
On factorise en $c.(2.c^2 - 3) = 0$.
La solution $c = 0$ est cohérente.
En revanche, c^2 ne peut pas atteindre la valeur $3/2$ qui est trop grande.

$\cos(x) = 0$	$\dfrac{\pi}{2}$ modulo π	$\left\{\dfrac{\pi}{2} + k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\dfrac{\pi}{2}, 3.\dfrac{\pi}{2}, \dots 11.\dfrac{\pi}{2}$



La somme des six racines est $12.\pi$ (en groupant deux à deux par exemple).

Et pour $3 \times \cos(3.t) = cos^3(t)$ c'est encore 0 qui me sert de contre-exemple.
Ensuite, on résout $9.c^3 - 9.c = c^3$. On trouve toujours $c = 0$ et aucune autre racine, car $8.c^2$ n'atteindra jamais 9.



Encore une somme égale à $12.\pi$.

◁32▷ Résolvez $\cos(2.x) = \sin(3.x)$ d'inconnue réelle x.

◁33▷ Pour un exercice, j'avais besoin de triplets d'entiers $(a,\ b,\ c)$ compris entre 0 et 20 (des notes de colle) tels que la moyenne harmonique et la moyenne arithmétique soient aussi des entiers.

Ecrivez un programme qui cherche ces triplets d'entiers (entre 0 et N, soyons général) tels que $\dfrac{a+b+c}{3}$ et $\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ soient entiers.

Attention, pas de test débile en type(..., int), on est en maths, on connaît % et //.

Et pour quatre notes ?
Et si on veut aussi que la moyenne géométrique soit un entier ?

◁34▷ On prend les quatre points A, B, C et D par

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2.\sqrt{2}-2 \\ 4.\sqrt{2}+2 \\ 4.\sqrt{2}-1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2.\sqrt{6}-\sqrt{2}-2 \\ \sqrt{6}-2.\sqrt{2}+2 \\ -2.\sqrt{6}-2.\sqrt{2}-1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -2.\sqrt{6}-\sqrt{2}-2 \\ -\sqrt{6}-2.\sqrt{2}+2 \\ 2.\sqrt{6}-2.\sqrt{2}-1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Montrez que ces quatre vecteurs ont la même norme. Montrez que O est le centre de gravité (isobarycentre) du tétraèdre (A, B, C, D).
Calculez $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}$.
Montrez que les angles AOB, AOC, AOD, BOC, BOD et COD sont tous égaux.

◁35▷ ♡ L'équation $x^2 + b.x + c = 0$ d'inconnue x admet pour racines α et β. Donnez *(sous forme développée)* l'équation polynomiale de racines α^2 et β^2.

L'équation $x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0$ d'inconnue x admet pour racines α, β et γ. Donnez l'équation polynomiale de racines α^2 et β^2 et γ^2. Donnez l'équation polynomiale de racines $\alpha.\beta$, $\alpha.\gamma$ et $\beta.\gamma$.

La méthode de Terminale ou de Physique : on résout, on trouve α et β, on les élève au carré, et on construit la nouvelle équation.

Mais on sait (relations coefficients racines) : $\alpha + \beta = -b$ et $\alpha.\beta = c$.
On passe aux carrés : $(\alpha+\beta)^2 = b^2$ et $(\alpha.\beta) = c^2$.
On arrange : $\alpha^2 + \beta^2 + 2.c = b^2$ et $\alpha^2.\beta^2 = c^2$.
On extrait : $\alpha^2 + \beta^2 = b^2 - 2.c$ et $\alpha^2.\beta^2 = c^2$.
On développe (relations racines coefficients) : $(X-\alpha^2).(X-\beta^2) = X^2 - (b^2-2.c).X + c^2$
On tient l'équation : $\boxed{x^2 - (b^2-2.c).x + c^2 = 0}$

On recommence avec trois racines : $X^3 + b.X^2 + c.X + d$.

$\alpha + \beta + \gamma = -b$	$\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma = c$	$\alpha.\beta.\gamma = -d$

De même alors

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = b^2 - 2.c$	$\alpha^2.\beta^2 + \alpha^2.\gamma^2 + \beta^2.\gamma^2 = c^2 - 2.b.d$	$\alpha^2.\beta^2.\gamma^2 = d^2$

L'équation est donc $X^3 - (b^2 - 2.c).X^2 + (c^2 - 2.b?d).X - d^2$.

Enfin :

$\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma = c$	$\alpha.\beta^2.\gamma + \alpha^2.\beta.\gamma + \alpha.\beta.\gamma^2 = b.d$	$(\alpha.\beta).(\alpha.\gamma).(\beta.\gamma) = d^2$

On a aussi l'équation.

◃36▹ Un rectangle a pour périmètre 12 unités. Entre combien et combien peut varier son aire. Quel est celui qui a la plus grande aire ?

On note a et b ses côtés.
On sait $a + b = 6$ (et ils sont positifs).
L'aire est $a.b$. Elle reste positive ou nulle.
D'ailleurs elle peut être nulle, pour un rectangle plat (côtés 0 et 6).
Sinon, on a une majoration : $\sqrt{a.b} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ (avec égalité si et seulement si $a = b$).
On majore donc $\sqrt{a.b}$ par 3.
L'aire ne pourra pas dépasser 9. Et elle l'attenidra pour le carré (côtés 3 et 3).

◃37▹ ♡ Résolvez l'équation « $\dfrac{z+i}{z-i}$ est un imaginaire pur » d'inconnue complexe z *(décrire l'ensemble des solutions sous géométrique)*.

On note M le complexe d'affixe z
A le complexe d'affixe i
B le complexe d'affixe $-i$.
Un imaginaire pur est un complexe d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π.
La condition $\dfrac{z+i}{z-i}$ a pour argument $\dfrac{\pi}{2}$ signifie qu'il y a un angle droit entre les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA}$.
Qui sont les points qui voient $[A,\ B]$ sous un angle droit ? Les points du cercle de diamètre $[A,\ B]$.
On trouve donc le cercle unité, les complexes de module 1.

Sinon, on peut poser $z = x + i.y$ et annuler la partie réelle de $\dfrac{x + i.(y+1)}{x + i.(y-1)}$.
C'est déjà un calcul quand même intéressant : $\dfrac{x + i.(y+1)}{x + i.(y-1)} = \dfrac{(x + i.(y+1)).(x - i.(y-1))}{x^2 + (y-1)^2}$.
Le dénominateur est maintenant réel, on peut le mettre de côté et annuler $\Re e((x + i.(y+1)).(x - i.(y-1))$.
On trouve $x^2 + (y-1).(y+1) = 0$. C'est directement $x^2 + y^2 = 1$. On a bien le cercle trouvé géométriquement.

◃38▹ *Dans cinq secondes, tu pourras ignorer cet exercice, mais ce qu'on ne peut pas ignorer, c'est le échauffement climatique.*
♡ Sachant $\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$, calculez $\tan(5.\pi/12)$.

Facile : $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{\tan(\pi/12)} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2 + \sqrt{3}$.

◃39▹ Sachant $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$, calculez $\sin(3.\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$
• en appliquant la formule précédente pour $\theta = \dfrac{\pi}{2} - t$
• en dérivant la formule en cosinus
• en revenant aux formules de Moivre et Euler

La première formule est à connaître par coeur. On la démontre de plusieurs façon.
Mais passons à la seconde.

On part de $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$, valable pour tout θ donc aussi pour $\dfrac{\pi}{2} - \theta$:

$$\cos\left(3.\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = 4.\cos^3\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 3.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

On remplace :

$$\cos\left(3.\frac{\pi}{2} - 3.\theta\right) = 4.\sin^3(\theta) - 3.\sin(\theta)$$

Rappel : *La formule* $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\theta)$ *est une évidence.*
Si vous devez la démontrer (et la comprendre), faites un dessin sur le cercle trigonométrique.
Si vous devez convaincre un élève de Terminale, développez $\cos(\pi/2).\cos(\theta)+\sin(\pi/2).\sin(\theta)$.
Mais sachez que vous ne lui rendrez pas service. Vous ne lui permettrez pas de comprendre.
Vous ferez de lui un crétin qui transforme les maths en formules qu'on applique sans comprendre.
tant pis pour cet élève de Terminale, il ne fera pas ingénieur. Une place de gagnée si vous faites 5/2.
Mais retenez que si aux concours vous faites la preuve en $\cos.\cos+\sin.\sin$, *le correcteur se dire « élève un peu con-con, esprit non scientifique, bon, on va voir avec le reste si il a de l'intuition et si il comprend ce dont il parle ».*

Même argument de trigonométrie sur le cercle :

$$4.\sin^3(\theta)-3.\cos(\theta)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}-3.\theta\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-3.\theta\right)=-\sin(3.\theta)$$

On vire les signes : $\sin(3.\theta=3.\sin(\theta)-4.\sin^3(\theta)$

Approche par dérivation : on part encore de $\cos(3.\theta)=4.\cos^3(\theta)-3.\cos(\theta)$ valable pour tout θ et on dérive.

$$-3.\sin(3.\theta)=4.3.\cos^2(\theta).(-\sin(\theta)+3.\sin(\theta)$$

On simplifie par 3 :

$$\sin(3.\theta)=4.\cos^2(\theta).\sin(\theta)-\sin(\theta)$$

Ce n'est pas la même qu'au dessus, mais $\sin(3.\theta)=4.(1-\sin^2(\theta)).\sin(\theta)-\sin(\theta)$

$\sin(3.\theta)=4.s-4.s^3-s=3.s-4.s^3$ c'est bon

Remarque : *On ne dérive jamais une relation* $f(x)=g(x)$ *en* $f'(x)=g'(x)$.
Ce qu'on a le droite de faire c'est dériver $\forall x,\ f(x)=g(x)$ *en* $\forall x,\ f'(x)=g'(x)$.
Sans le $\forall x$, *c'est a priori juste en un point deux courbes qui se croisent. Elles n'ont aucune raison d'y avoir la même tangente.*
Avec le $\forall x$, *vous avez deux courbes qui se superposent sur un intervalle, et les tangentes sont les mêmes.*
Et avec le $\forall x$ *mis en valeur, vous afites enfin des maths et pas juste du calcul...*

On écrit $\sin(3.\theta)=\dfrac{e^{3.i.\theta}-e^{-3.i.\theta}}{2.i}$

$$\sin(3.\theta)=\frac{(e^{i.\theta})^3-(e^{-i.\theta})^3}{2.i}$$
$$\sin(3.\theta)=\frac{(c+i.s)^3-(c-i.s)^3}{2.i}$$
$$\sin(3.\theta)=\frac{(c^3+3.c^2.i.s+3.c.i^2.s^2+i^3.s^3)-(c^3-3.c^2.i.s+3.c.i^2.s^2-i^3.s^3)}{2.i}$$
$$\sin(3.\theta)=\frac{(c^3+3.c^2.i.s-3.c.i^2.s^2-i.s^3)-(c^3-3.c^2.i.s-3.c.i^2.s^2+i.s^3)}{2.i}$$
$$\sin(3.\theta)=\frac{6.c^2.i.s-2.i.s^3}{2.i}$$
$$\sin(3.\theta)=3.c^2.s-s^3$$
$$\sin(3.\theta)=3.(1-s^2).s-s^3$$
$$\sin(3.\theta)=3.s-4.s^3$$

On notera • qu'on retrouve effectivement la même
• qu'un prof de Sup estimera que c'est le type de calcul que vous devez maîtriser sans faute, et de votre propre initiative
• qu'on avait aussi ce résultat par $\Im m(e^{3.i.\theta})$

◃40▹ Résolvez l'équation $|x+2.i|=15$ d'inconnue réelle x.
Résolvez l'équation $|x+2.i|=15$ d'inconnue complexe x.

La première donne deux solutions : $\sqrt{221}$ et $-\sqrt{221}$ en résolvant $\sqrt{x^2+4}=15$.

La seconde donne le cercle de centre $-2.i$ et de rayon 15. Et ce cercle coupe évidemment Ox en les deux points indiqués.
Il suffit en effet de reconnaître $|z-z_0|=r$ ou même $MM_0=r$ si vous préférez.

Tout élève qui sera parti en posant $z=x+i.y$ *restera un élève de Terminable.*

◃41▹ On se donne deux réels a et b, on veut montrer : $-\sqrt{a^2+b^2}\leqslant a.\cos(x)+b.\sin(x)\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$. Pour cela, exprimez $(a^2+b^2)-(a.\cos(x)+b.\sin(x))^2$ à l'aide de $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, et montrez que le numérateur de cette fraction en t est un carré parfait. Concluez.

On remplace par les formules dans $(a^2+b^2)-(a.\cos(x)+b.\sin(x))^2$ et on trouve

$$(a^2+b^2)-\frac{(a.(1-t^2)+2.b.t)^2}{(1+t^2)^2}$$

puis

$$\frac{(a^2+b^2).(1+2.t^2+t^4)-(a^2.(1+t^4-2.t^2)+4.b^2.t^2+4.b.t.a.(1+t)^2)}{(1+t^2)^2}$$

Ne regardons que le numérateur et simplifions le peu qu'on peut :

$$b^2.t^4+4.a.b.t^3+(4.a^2-2.b^2).t^2-4.a.b.t+b^2$$

On doit y chercher un carré. Pas le carré d'une somme $(\alpha+\beta)^2$, il y a trop de termes.
Mais pour $(\alpha+\beta+\gamma)^2$ avec ses carrés et double produits, on a bon espoir.
Vu qui sont les carrés, et vus les signes, on propose de développer $(b.t^2+2.a.t-b)^2$.

En tant que carré de réel, ce numérateur est tout aussi positif que le dénominateur.

On a donc $(a^2+b^2)-\dfrac{(a.(1-t^2)+2.b.t)^2}{(1+t^2)^2}\geqslant 0$ puis $(a^2+b^2)\geqslant\Big(a.\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2.b.t}{1+t^2}\Big)^2$
et enfin

$$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\Big|a.\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2.b.t}{1+t^2}\Big|$$

et c'est ce qu'on voulait.

◁42▷ On pose $\alpha=Arccos\Big(\dfrac{16}{65}\Big)$, $\beta=Arcsin\Big(\dfrac{11}{61}\Big)$. Montrez que $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, , $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$ sont rationnels.

On rappelle : $\cos(Arccos(x))=x$ par définition, et $\sin(Arccos(x))=\sqrt{1-x^2}$ par théorème de Pythagore et signe imposé (intervalle).
On peut donc déterminer les sinus et cosinus de nos angles, puis leurs tangentes par quotient.
Comme on veut qu'ils soient rationnels, il suffit de vérifier que $\sqrt{1-\frac{16^2}{65^2}}$ est rationnel. Son dénominateur est 65, c'est bon, et son numérateur $\sqrt{65^2-16^2}$. On l'écrit

$$\sqrt{(65+16).(65-16)}=\sqrt{81.49}=\sqrt{9^2.7^2}=9.7$$

De même, pour l'autre angle :

$$\sqrt{61^2-11^2}=\sqrt{(61-11).(61+11)}=\sqrt{50.72}=\sqrt{25.4.36}=\sqrt{(5.2.6)^2}$$

Bref, on dresse le tableau :

angle	$Arccos(16/65)$	$Arcsin(11/61)$
cosinus	$16/65$	$60/61$
sinus	$63/63$	$11/61$
tangente	$63/16$	$11/60$

Et les autres ? pas besoin de terminer les calculs : $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha).\cos(\beta)+\cos(\alpha).\sin(\beta)$. C'est une somme et produit de rationnels. C'est un rationnel.
Il en va de même du cosinus puis du quotient sinus sur cosinus.
La clef est juste « $(\mathbb{Q},+,.)$ est un corps »

◁43▷ Trouvez les six solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^6+z^3.(z+1)^3+(z+1)^6=0$ *(il n'y a que si vous êtes masochiste que vous développerez tout ! trouvez le changement de variable)*. Calculez leur somme.

On part de $z^6+z^3.(z+1)^3+(z+1)^6=0$ et on tente d'y voir cachés nos complexes utiles ou des transformations.
0 n'étant pas solution, on peut diviser : $1+\dfrac{(z+1)^3}{z^3}+\dfrac{(z+1)^6}{z^6}=0$.
L'envie nous vient de poser $t=\dfrac{z+1}{z}$ ou même $T=\dfrac{z+1}{z}$. On a alors l'équation $T^2+T+1=0$.
On la connaît bien : $T=j$ ou $T=j^2$.

Du classique	$T=j$			$T=j^2$		
mais qui est T ?	$t^3=e^{2.i.\pi/3}$			$t^3=e^{4.i.\pi/3}$		
Trois racines à chaque fois	$t=e^{2.i.\pi/9}$	$t=e^{2.i.\pi/9}.j$	$t=e^{2.i.\pi/9}.j^2$	$t=e^{4.i.\pi/9}$	$t=e^{4.i.\pi/9}.j$	$t=e^{4.i.\pi/9}.j^2$
mais $t=1+\frac{1}{z}$ donc $z=\frac{1}{t-1}$						

La somme des racines se retrouve par les formules de Viète.
On commence à développer $z^6+z^3.(z+1)^3+(z+1)^6=z^6+z^3.(z^3+3.z^2+\dots)+(z^6+6.z^5+\dots)$.
On trouve $3.z^6+9.z^5+\dots$. On divise par le coefficient dominant : $z^6+3.z^5+\dots$.
La somme des racines vaut $\boxed{-3}$

◁44▷ ♡ j est le complexe $e^{2.i.\pi/3}$. Calculez j^{2019} et $(1+j)^{2019}$ et $(1-j)^{2019}$.

Calculez			
	$A=\sum_{k=0}^{2019} j^k$	$B=\sum_{k=0}^{2019}\binom{2019}{k}.j^k$	$C=\sum_{k=0}^{2019}\binom{2019}{p}.j^k$
	$D=\sum_{p=0}^{2019}\binom{2019}{p}.j^k$	$E=\sum_{k=0}^{2019}\binom{2019}{p}.j^p$	$F=\sum_{\substack{0\leq k\leq 2019\\ 0\leq p\leq 2019}}\binom{2019}{p}.j^k$

$j^{2019}=j^{673.3}=1$
$j^{2019}=1$, $(1+j)^{2019}=(e^{i.\pi/3})^{2019}=-1$
$(1-j)=\sqrt{3}.e^{-i.\pi/6}$ on élève à la puissance 2019 : $-3^{2019/2}$

$A=\sum_{k=0}^{2019} j^k=\frac{1-j^{2020}}{1-j}$	1	série géométrique ou groupement
$B=\sum_{k=0}^{2019}\binom{2019}{k}.j^k=(1+j)^{2019}$	$(1+j)^{2019}$	binôme de Newton
$C=\sum_{k=0}^{2019}\binom{2019}{p}.j^k$	$\binom{2019}{p}.j^k$	série géométrique, p donné
$D=\sum_{p=0}^{2019}\binom{2019}{p}.j^k=j^k.\sum_{p=0}^{2019}\binom{2019}{p}$	$2^{2019}.j^k$	binôme de Newton, k donné
$E=\sum_{k=0}^{2019}\binom{2019}{p}.j^p=\binom{2019}{p}.j^p.\sum_{k=0}^{2019}1$	$2020.\binom{2019}{p}.j^p$	compteur, p fixé
$F=\sum_{\substack{0\leq k\leq 2019\\ 0\leq p\leq 2019}}\binom{2019}{p}.j^k=\Big(\sum_{0\leq p\leq 2019}\binom{2019}{p}\Big).\Big(\sum_{0\leq k\leq 2019} j^k\Big)$	$2^{2019}.$	somme double

A est une série géométrique, mais on sait aussi que c'est une somme où les termes s'en vont par trois : $A=1$.

B est la formule du binôme : $B=(1+j)^{2019}$ déjà calculé.

Dans C, p est fixé et le binomial sort : $C=\binom{2019}{p}.A=\binom{2019}{p}$.

Dans D, c'est k qui est fixé et on a la somme des binomiaux : $D=j^k.\Big(\sum_{p=0}^{2019}\binom{2019}{p}\Big)=2^{2019}.j^k$.

Dans E, k est un compteur pour 2020 termes tous égaux à $\binom{2019}{p}.j^p$ et donc $E=2020.\binom{2019}{p}.j^p$.

F est le produit de deux sommes déjà calculées : $F=\Big(\sum_{0\leq p\leq 2019}\binom{2019}{p}\Big).\Big(\sum_{0\leq k\leq 2019} j^k\Big)=2^{2019}.1$

◁45▷ Oui, ce sont des exposants :

$$1^{\left(\sum_{k=0}^{2018} k\right)}+j^{\left(\sum_{k=0}^{2018} k^2\right)}+(j^2)^{\left(\sum_{k=0}^{2018} k^3\right)}.$$

La somme $\sum_{k=0}^{2018} k$ vaut $\frac{2018.2019}{2}$. Il y a un facteur 3 au numérateur dans 2019, et aucun au dénominateur.

$\sum_{k=0}^{2018} k$ est un multiple de 3. Le premier terme vaut 1, mais bon, on le savait déjà : $1^N=1$.

Passons à $\sum_{k=0}^{2018} k^2$, là encore modulo 3 puisque cet entier est juste un exposant de j.
On regroupe trois par trois : $(0^2+1^2+2^2)+(3^2+4^2+5^2)+\ldots+(2016^2+2017^2+2018^2)$.
Proprement : $\sum_{p=0}^{672}((3.k)^2+(3.k+1)^2+(3.k+2)^2)$.
Mais pour chaque groupe : $(3.k)^2+(3.k+1)^2+(3.k+2)^2 = 27.k^2+18.k+5 = 2\ [3]$.
On somme 673 termes congrus à 2 : La somme est congrue à 2 modulo 3.
Le terme du milieu est donc j^2.

On pouvait aussi écrire $\sum_{k=0}^{2018} k^2 = \dfrac{2018.2019.(2.2018+1)}{6}$ et réduire ensuite modulo 3.

On réduit aussi modulo 3 : $\sum_{k=0}^{2018} k^3 = \sum_{p=0}^{672}((3.k)^3+(3.k+1)^3+(3.k+2)^3)$.
Encore une fois : $(3.k)^3+(3.k+1)^3+(3.k+2)^3 = 0\ [3]$.
Qu'importe le nombre de termes, la somme vaut 0 modulo 3.

Le terme $(j^2)^{\left(\sum_{k=0}^{2018} k^3\right)}$ vaut 1.

La grande somme vaut $1+j^2+1$. On se contentera de $-j+1$.

◃46▹ On veut résoudre $160.X^3-240.X+90.X-9=0$ d'inconnue réelle X.
En étudiant les variations de l'application $x \longmapsto 160.x^3-240.x+90.x-9$, montrez que les trois solutions sont réelles. calculez leur somme, la somme de leurs carrés et la somme de leurs inverses.
Montrez que par une translation de $1/2$, l'équation devient $160.Y^3-30.Y-4=0$ d'inconnue Y.
Posez alors $Y=\alpha.\cos(\theta)$ et ajustez α pour que l'équation prenne la forme $4.\cos^3(\theta)-3.\cos(\theta) =$ .
Déterminez alors $3.\theta$ *(modulo* $2.\pi$*)* et déduisez les valeurs de θ *(modulo* $2.\pi/3$*)* puis les trois valeurs de $\cos(\theta)$.
Indiquez la forme des trois solutions réelles de l'équation initiale.

◃47▹ Le polynôme $X^4+a.X^3+b.X^2+c.X+d$ a pour racines r_1 à r_4. Combien de valeurs peut prendre $(r_1-r_2).(r_1-r_3).(r_1-r_4).(r_2-r_3).(r_2-r_4).(r_3-r_4)$ sous l'action des 4! permutations de la liste d'indices $[1,\ 2,\ 3,\ 4]$?
Combien de valeurs peut prendre $r_1+2.r_2+3.r_3+4.r_4$ sous l'action des 4! permutations de la liste d'indices $[1,\ 2,\ 3,\ 4]$? Même question avec $r_1+2.r_2+3.r_3$.

$(r_1-r_2).(r_1-r_3).(r_1-r_4).(r_2-r_3).(r_2-r_4).(r_3-r_4)$ et son opposé $-(r_1-r_2).(r_1-r_3).(r_1-r_4).(r_2-r_3).(r_2-r_4).(r_3-r_4)$
obtenue par exemple avec $\overrightarrow{(1\ 2)}$ $(r_1-r_2).(r_1-r_3).(r_1-r_4).(r_2-r_3).(r_2-r_4).(r_3-r_4)$ devient
$(r_2-r_1).(r_2-r_3).(r_2-r_4).(r_1-r_3).(r_1-r_4).(r_3-r_4)$ (trois signes moins)

$r_1+2.r_2+3.r_3+4.r_4$	$r_2+2.r_1+3.r_3+4.r_4$	$r_3+2.r_2+3.r_1+4.r_4$	$r_4+2.r_2+3.r_3+4.r_1$
$r_1+2.r_2+3.r_4+4.r_3$	$r_2+2.r_1+3.r_4+4.r_3$	$r_3+2.r_2+3.r_4+4.r_1$	$r_4+2.r_2+3.r_1+4.r_3$
$r_1+2.r_3+3.r_2+4.r_4$	$r_2+2.r_3+3.r_1+4.r_4$	$r_3+2.r_1+3.r_1+4.r_4$	$r_4+2.r_2+3.r_3+4.r_1$
$r_1+2.r_4+3.r_3+4.r_2$	$r_2+2.r_4+3.r_3+4.r_1$	$r_3+2.r_4+3.r_1+4.r_2$	$r_4+2.r_1+3.r_3+4.r_2$
$r_1+2.r_3+3.r_4+4.r_2$	$r_2+2.r_3+3.r_4+4.r_1$	$r_3+2.r_1+3.r_4+4.r_2$	$r_4+2.r_3+3.r_1+4.r_2$
$r_1+2.r_4+3.r_2+4.r_3$	$r_2+2.r_4+3.r_1+4.r_3$	$r_3+2.r_4+3.r_2+4.r_1$	$r_4+2.r_1+3.r_2+4.r_3$
24 valeurs			

On évitera de se prendre la tête avec des questions du type
« serait il possible de choisir a_1 à a_4 pour avoir $r_1+2.r_3+3.r_4+4.r_2 = r_2+2.r_3+3.r_4+4.r_1$ par exemple ».
C'est peut être jouable avec des cas particuliers.
De même d'ailleurs si « par hasard », les quatre r_k sont égaux.

Ensuite, avec $a_1+2.a_2+3.a_3$ on peut se dire qu'il y a moins de possibilités puisque a_4 n'est pas là.
Mais justement, en écrivant $a_1+2.a_2+3.a_3+0.a_4$ on voit qu'on peut jouer sur « qui sont les trois éléments présents ».
Et on peut reprendre le tableau précédent et voir qu'on a 24 valeurs là encore.

$r_1+2.r_2+3.r_3$	$r_2+2.r_1+3.r_3$	$r_3+2.r_2+3.r_1$	$r_4+2.r_2+3.r_3$
$r_1+2.r_2+3.r_4$	$r_2+2.r_1+3.r_4$	$r_3+2.r_2+3.r_4$	$r_4+2.r_2+3.r_1$
$r_1+2.r_3+3.r_2$	$r_2+2.r_3+3.r_1$	$r_3+2.r_1+3.r_1$	$r_4+2.r_2+3.r_3$
$r_1+2.r_4+3.r_3$	$r_2+2.r_4+3.r_3$	$r_3+2.r_4+3.r_1$	$r_4+2.r_1+3.r_3$
$r_1+2.r_3+3.r_4$	$r_2+2.r_3+3.r_4$	$r_3+2.r_1+3.r_4$	$r_4+2.r_3+3.r_1$
$r_1+2.r_4+3.r_2$	$r_2+2.r_4+3.r_1$	$r_3+2.r_4+3.r_2$	$r_4+2.r_1+3.r_2$
24 valeurs			

◃48▹ Montrez par récurrence sur n plus grand que 5 : $3^n \leqslant \frac{(2.n)!}{(n!)^2} \leqslant 4^n$.

Pour prouver $3^n \leqslant \frac{(2.n)!}{(n!)^2} \leqslant 4^n$, on ne se précipite pas trop, on crée deux propriétés :

P_n	Q_n
$3^n \leqslant \frac{(2.n)!}{(n!)^2}$	$\frac{(2.n)!}{(n!)^2} \leqslant 4^n$

On les initialise toutes deux au rang 5 en effectuant :

$$\frac{10!}{(5!)^2} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{(5.4.3.2.1).(5.4.3.2.1)} = \frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.1} = \frac{9.8.7.6}{4.3} = \frac{9.2.7.2}{1}$$

On doit donc minorer 252 par 9.9.3 *(évident)* et majorer par 1024 *(connu)*.
L'initialisation est faite.

On suppose pour un n donné, quelconque : $3^n \leqslant \frac{(2.n)!}{(n!)^2}$.

On veut alors prouver $3^{n+1} \leqslant \frac{(2.n+1)!}{((n+1)!)^2}$.

On regarde : $\frac{(2.n+1)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2.n)!.(2.n+1).(2.n+2)}{(n!.(n+1))^2} = \frac{(2.n)!}{(n!)^2}.\frac{(2.n+1).(2.n+2)}{(n+1)^2} = \frac{(2.n)!}{(n!)^2}.\frac{(4.n+2)}{(n+1)}$.

Sachant qu'on a déjà supposé $3^n \leqslant \frac{(2.n)!}{(n!)^2}$, la question se réduit à prouver que $\frac{(4.n+2)}{(n+1)}$ est plus grand que 3.

On effectue la différence : $\frac{4.n+2}{n+1} - 3 = \frac{n-1}{n+1}$. C'est positif. C'est bon.

Pour la suite de propriétés (Q_n), on suppose encore, pour un n quelconque donné $\frac{(2.n)!}{(n!)^2} \leqslant 4^n$ et on veut passer à $\frac{(2.n)!}{(n!)^2}.\frac{(4.n+2)}{(n+1)} \leqslant 4^n.4$.

Il suffit de prouver $\frac{(4.n+2)}{(n+1)} \leqslant 4$, ce qui est encore évident puisque $4.n+2$ est plus petit que $4.(n+1)$.

La propriété est initialisée au rang 5 et est héréditaire, le principe de récurrence nous garantit qu'elle est vraie pour tout n au moins égal à 4.

Remarque : *Air connu pour un exercice de ce type :*
on doit prouver $\forall n$, $(P_n \Rightarrow P_{n+1})$, ce qui se rédige par "on prend un n quelconque fixé, on suppose $P_n$vraie"
et surtout pas en "on suppose pour tout n $P_n$vraie".

Vous êtes peut-être un mathématicien si...
– Vous ne pouvez pas vous empêcher de lâcher des contre-exemples dès que quelqu'un soutient une impossibilité,
– À 19 ans vos années les plus productives sont déjà derrière vous,
– Votre résultat majeur est nommé d'après le nom de quelqu'un d'autre,
– Vous faites des erreurs... mais ce sont des erreurs très intéressantes,
– Vous vous demandez comment Euler prononçait « Euclide »,
– Vous avez déjà souri pendant 10 secondes à la fin d'une preuve,
– Vous comprenez toutes les mathématiques que Gauss a manipulées... jusqu'à ses 13 ans,
– Votre matière principale était les mathématiques, la seconde la caféine,
– Vous connaissez tout l'alphabet grec, sans connaitre un seul mot de grec,
– La solution à tout problème passe par le décompte de balles dans des boîtes,
– Faire plus d'une chose à la fois est ennuyeux,
– Vous savez compter jusqu'à 32 avec les doigts de la main (en binaire),
– Vous pensez aux mathématiques en tant qu'art, pas (forcément) en tant que science...
– Vous trouvez que les blagues mathématiques sont drôles,
– Vous vous surprenez en train de dire « il existe » au lieu de « il y a »,

– Vous avez déjà eu des débats virulents autour de 0, 999 . . . = 1,
– Ou des débats virulents autour de la différence entre « Deux pièces sont lancées et l'une d'elles tombe sur face » et « Deux pièces sont lancées. Cette pièce donnée tombe sur face »,
– Vous trouvez ça cool, des nouvelles formules dont la somme donne e,
– Vous passez votre temps à faire de l'aide aux devoirs pour des inconnus,
– Vous écrivez des e mails en LATEX, [5]
– Vous prouvez votre innocence lors d'un interrogatoire en commençant par « Supposez en effet que je sois coupable... », point à partir duquel vous êtes arrêté,
– Mélanger un jeu de cartes vous fait penser au groupe symétrique S_n,
– Vous savez que 1+1 ne fait pas toujours 2,
– Vous grimacez chaque fois que vous lisez ou entendez quelqu'un dire « et réciproquement » incorrectement,
– Vous étiez allé voir le film Matrix parce que vous vous attendiez à des mathématiques...

◃49▹ Une liste de phrases, une liste de permutations. Appariez les :

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$	

Les philanthropies des ouvriers charpentiers. *Tu me paraissais bien câline.* Le boutre du Sultan coulait au confluent de la Garonne. *Tu danses comme un beau ballot.* Ce cas de Corée me turlupine. *L'aspirant habite Javel.* Le capitaine a enfumé sa cale. *Les mutins ont passé la berge du ravin.*

Javel	habite	ant	spir	a	l			
Tu me		araissais bien		â		ine		
Les		utins ont		assé la		erge du ra		in
Tu		an		es comme un beau		allot.		
Ce c		s de C		rée me t		rl		pine

◃50▹ Dans cette famille, tous les enfants *(Prof, Atchoum, Dormeur, Fouad, Grincheux, Timide et Joyeux)* sont nés un 7 juillet *(07/07, oui)*. Le jour de l'anniversaire, chacun a un gâteau avec autant de bougies que son âge. Tiens, il y a cinq ans, il y avait autant de gâteaux, mais deux fois moins de bougies que cette année. Alors, combien de bougies ?

Et maintenant, cette histoire de nains tous nés un 7 juillet.

Il y a cinq ans, il fallait $\sum_{k=0}^{6} a_k$ bougies. Et cette année, il en faut $\sum_{k=0}^{6} (a_k + 5)$.

On nous dit donc :

$$\sum_{k=0}^{6} (a_k + 5) = 2. \sum_{k=0}^{6} a_k$$

soit $\sum_{k=0}^{6} a_k = 7 \times 5$. Il y a donc 70 bougies cette année.

◃51▹ ♡ t est un réel fixé, θ est un réel de $]-\pi/2,\ \pi/2[$. Montrez : $\dfrac{1 + i.\tan(\theta)}{1 - i.\tan(\theta)} = e^{2.i.\theta}$.

Déterminez partie réelle et partie imaginaire de $\dfrac{1+i.t}{1-i.t}$ en utilisant la quantité conjuguée. Retrouvez les formules en arc moitié.

$$\frac{1 + i.\tan(\theta)}{1 - i.\tan(\theta)} = \frac{1 + i.\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1 - i.\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta) + i.\sin(\theta)}{\cos(\theta) - i.\sin(\theta)} = \frac{e^{i.\theta}}{e^{-i.\theta}} = e^{2.i.\theta}.$$

On a aussi $\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = \dfrac{(1+i.t)^2}{(1-i.t).(1+i.t)} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + i.\dfrac{2.t}{1+t^2}$.

On identifie partie réelle et partie imaginaire...

5. *il y en a déjà parmi vous !*

◃52▹

u et v sont deux applications de classe C^2 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ *(deux fois dérivables, de plus u'' et v'' sont continues)*. Montrez : $\int_a^b u''.v = [u'.v - u.v'] + \int_a^b u.v''$.
Montrez sous hypothèse C^3 : $\int_a^b u^{(3)}v = [u''.v - u'.v' + u.v''] - \int_a^b u.v^{(3)}$.
Donnez la formule à l'ordre n *(et démontrez la)*.

On part de $\int_a^b u''.v = [u'.v]_a^b - \int_a^b u'.v'$

u''	$\hookleftarrow$	u'
v	$\hookrightarrow$	v'

puis on intègre $\int_a^b u'.v'$ *en* $[u.v']_a^b - \int_a^b u.v''$

u'	$\hookleftarrow$	u
v'	$\hookrightarrow$	v''

On peut recommencer.
Mais il y a plus intelligent.
On pose $w = u''.v - u'.v' + u.v''$.
On dérive : $w' = \begin{array}{llllll} (u''.v & & -u'.v' & & +u.v'')' & \\ u'''.v & +u''.v' & -u''.v' & -u'.v'' & +u'.v'' & +u.v''' \end{array}$
On simplifie : $w' = u'''.v + u.v'''$.
On intègre : $[w]_a^b = \int_a^b w' = \int_a^b (u'''.v + u.v''')$.
On bascule : $\int_a^b u^{(3)}v = [u''.v - u'.v' + u.v''] - \int_a^b u.v^{(3)}$

La formule est $\boxed{\int_a^b u^{(n+1)}v = [\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.u^{(n-k)}.v^{(k)}] + (-1)^n.\int_a^b u.v^{(n+1)}}$
On la prouve par récurrence.
Ou en dérivant $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.u^{(n-k)}.v^{(k)}$ *et en faisant passer de l'autre côté.*

◃53▹

Calculez $\int_1^2 t^2.\log_2(t).dt$.

On écrit cette fois $\dfrac{t^2.\ln(t)}{\ln(2)}$ et on intègre par parties autant que nécessaire (une fois)

$\ln(t)$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{1}{t}$
t^2	$\hookleftarrow$	$\dfrac{t^3}{3}$

Primitive en $t \longmapsto \dfrac{3.t^3.\ln(t) - t^3}{9}$ et intégrale égale à $\boxed{\dfrac{24}{9} - \dfrac{7}{9.\ln(2)}}$

Et $\dfrac{1}{\ln(2)}$ *ne se simplifie pas. pas plus que* $(\ln(2))^2$ *ou* $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$

◃54▹

n est un entier naturel qu'on choisira convenablement à la fin.
On définit $f = x \longmapsto \dfrac{x^n.(1-x)^n}{n!}$. Montrez pour tout x de $]0,\ 1[$: $0 < f(x) < \dfrac{1}{n!}$.
Montrez que chaque $f^{(k)}(0)$ et $f^{(k)}(1)$ est un entier.
On suppose que π^2 est un rationnel de la forme $\dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels.
Quel type de raisonnement se prépare-t-on à faire ?
On définit : $F = (x \longmapsto b^n.(\pi^{2.n}.f(x) - \pi^{2.n-2}.f''(x) + \pi^{2.n-4}.f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n.f^{(2.n)}(x))$ *(écrivez proprement avec un $\sum$)*.
Montrez que $F(0)$ et $F(1)$ sont deux entiers.
Montrez : $(x \longmapsto F'(x).\sin(\pi.x) - \pi.F(x).\cos(\pi.x))' = (x \longmapsto \pi^2.a^n.f(x).\sin(\pi.x))$.
Déduisez : $\pi.\int_0^1 a^n.f(x).\sin(\pi.x).dx = F(0) + F(1)$.
Montrez aussi $0 < \pi.\int_0^1 a^n.f(x).\sin(\pi.x).dx \leqslant \dfrac{\pi.a^n}{n!}$.
Choisissez maintenant n pour avoir $\dfrac{\pi.a^n}{n!} < 1$.
Aboutissez à la contradiction attendue.
π est il rationnel ? Et $\sqrt{\pi}$?

Un classique.

Quand x varie entre 0 et 1, le réel $x.(1-x)$ reste entre 0 et 1 (et même entre 0 et $\frac{1}{4}$, valeur atteinte au maximum en $x = \frac{1}{2}$.
La valeur 0 n'est atteinte qu'en 0.
Pour x dans $]0, 1[$, on encadre $0 < x.(1-x) < 1$, on élève à la puissance n et on divise par $n!$.

---

f est nulle en 0 et en 1, mais pas forcément ses dérivées, n'abusez pas.
Toutefois, par exemple : $f'(x) = n.\frac{(x.(1-x))^{n-1}}{n!}.(1-2.x)$ nulle en 0 et en 1.
Et si on continue $f'(x) = n.(n-1)\frac{(x.(1-x))^{n-2}}{n!}.(1-2.x)^2 - 2.n.\frac{(x.(1-x))^{n-1}}{n!}$. Nulle en 0 et en 1.
Mais à force de dériver, il va rester des choses.

Prenons $n = 3$:

$f^{(n)}(x)$	en 0	en 1
$\frac{x^3.(1-x)^3}{6}$	0	0
$\frac{x^2.(1-x)^2}{2}.(1-2.x)$	0	0
$x.(1-x).(5.x^2-5.x+1)$	0	0
$-20.x^3-30.x^2-12.x+1$	1	-1
$-60.x^2+60.x-12$	-12	-12

Bon, on a quand même des entiers.

Une idée : utiliser la formule de Leibniz, similaire à la formule du binôme :
$(u.v)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}.u^{(k-i)}.v^{(i)}$ (démontrable par récurrence).
On l'applique à $u = x \longmapsto x^n$ et $v = x \longmapsto (1-x)^n$
A prolonger....

Ce qu'on a établi pour 0, on l'établit aussi par 1, car le graphe de F admet un bel axe de symétrie $x = \frac{1}{2}$.
De fait, $F(x) = F(1-x)$.
En dérivant donc : $F^{(n)}(x) = (-1)^n.F^{(n)}(1-x)$.
On a donc $F^{(n}(1) = (-1)^n.F^{(n)}(0)$.
Efficace, non ?

On se prépare à faire un raisonnement par l'absurde.

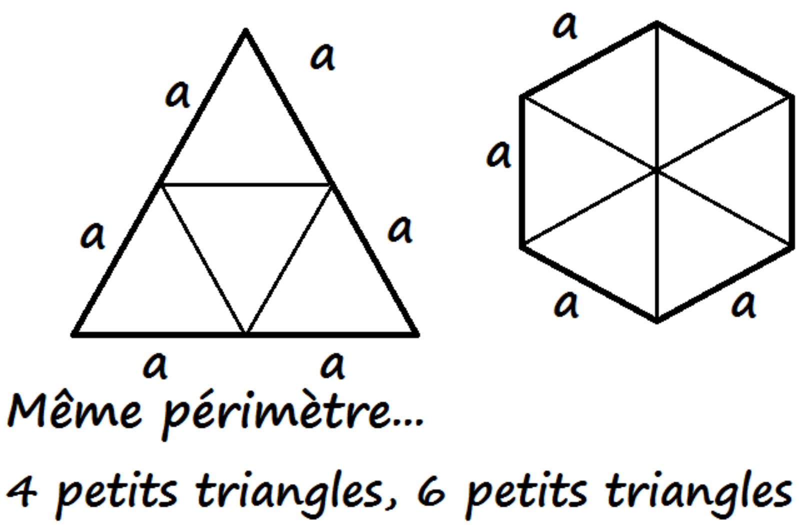
Proprement $F = (x \longmapsto b^n.(\pi^{2.n}.f(x) - \pi^{2.n-2}.f''(x) + \pi^{2.n-4}.f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n.f^{(2.n)}(x))$ deivient $\sum_{k=0}^{2.n}(-1)^k.b^n.\pi^{2.n-2.k}.f^{(2.k)}$
Dans la somme alternée en $x = 0$, chaque $(-1)^k.b^n.\pi^{2.n-2.k}.f^{(2.k)}(0)$ est un entier.
En effet, $f^{(2.k)}(0)$ est entier (vu plus hait), et $b^n.\pi^{2.n-2.k} = b^n.(\pi^2)^{n-k} = b^n.(\frac{a}{b})^{n-k} = a^{n-k}.b^k$ avec $n-k$ positif et k aussi.

En 1, c'est pareil.

A terminer.
Le final repose sur une contradiction avec une suite d'entiers strictement positifs qui tend vers 0. Ce qui est un peu contradictoire, non ?

Si on a réussi à prouver que π est irrationnel, alors $\sqrt{\pi}$l'est aussi.
Il suffit de raisonner par contraposée.
Si $\sqrt{\pi}$était rationnel, son carré $(\sqrt{\pi})^2$le serait aussi.

◁55▷ Un triangle équilatéral et un hexagone régulier ont le même périmètre ; dans quel rapport sont leurs aires ?



Un dessin vaut mieux qu'un long discours.
Rapport : six contre quatre.

◃ 56 ▹ Vous tirez au hasard uniforme un entier entre 1 et 2019. Quelle est la probabilité qu'il soit multiple de 7 ou de 13 (ou inclusif).
Vous tirez au hasard uniforme un entier entre 1 et 2019. Quelle est la probabilité qu'il soit multiple de 7 ou de 13 (ou exclusif).

La probabilité se compte par « nombre de cas favorables divisé par nombre de cas possibles ».
Les cas possibles, c'est range(1, 2020). Il y a 2019 entiers.

Prenons une question intermédiaire : multiples de 7.

Il y a 7, 14, 21 jusqu'à 2016. Il y en a
- à peu près $\dfrac{2019}{7}$ (réponse de PSI)
- $\left[\dfrac{2019}{7}\right]$ (réponse de PC)
- le quotient euclidien de 2019 par 7 (réponse de MP)
- 2019 / 7 (réponse de MP option Python)
- 288

On compte aussi les multiples de 13 : il y en a 155 (même calcul mais avec 13).

Alors pour « multiple de 7 ou multiple de 13 », il y en aurait $288 + 155$?

Non.
Car avec cettedémarche, les multiples de 91 sont comptés deux fois. Une fois comme multiples de 7, une fois comme multiples de 13.
Et il y en a 22 *(là on peut en donner la liste)*.

Il faut les enlever.

Et pour le « ou exlcusif », il faudra les enlever deux fois.

Je vous offre un bilan pour toutes les réponses, y compris aux questions non posées :

multiples de 7	$(2019/7) = 288$	S
multiples de 13	$(2019/13) = 155$	T
multiples de 7 et de 13 (donc de 91)	$(2019/(73 * 7) = 22$	$S \cap T$
multiples de 7 ou de 13	$288 + 155 - 22$	$S \cup T$
multiples de 7 ou de 13 (mais pas les deux)	$288 + 155 - 2.22$	$S \Delta T$

Application numérique : ou inclusif : 20,8 pour cent
ou exclusif : $19,7$ pour cent

◃ 57 ▹ Trouvez a et b sachant : $a + b = 15$ et $a^2 + b^2 = 30$.

On a à la fois $a + b = 15$ et $15^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b = 30 + 2.a.b$.

On raisonne par équivalences : $a + b = 15$ et $a.b = \dfrac{15^2 - 30}{2}$.

a et b sont les deux racines de l'équation $x^2 - 15.x + \dfrac{15^2 - 30}{2} = 0$ d'inconnue réelle x.

◁ 58 ▷

Montrez : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos^3(\theta) = \dfrac{\cos(3.\theta) + 3.\cos(\theta)}{4}$.
Exprimez $\theta \longmapsto \cos(8.\theta)$ comme combinaison linéaire de $\theta \longmapsto \cos^k(\theta)$ pour θ de 0 à 8.

On peut partir de $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$ puis isoler $\cos^3(\theta)$.

On peut partir de $\left(\dfrac{e^{i.\theta} + e^{-i.\theta}}{2}\right)^3$ et développer par la formule du binôme puis regrouper au numérateur $e^{3.i.\theta} + e^{-3.i.\theta}$ puis $3.e^{2.i.\theta}.e^{-i.\theta}$ et $3.e^{i.\theta}.e^{-2.i.\theta}$.

Pour la seconde, on fait un triple appel de la formule $\cos(2.t) = 2.\cos^2(t) - 1$:

$$\cos(8.\theta) = 2.(\cos(4.\theta))^2 - 1 = 2.\left(2.(\cos(2.\theta))^3 - 1\right)^2 - 1$$

et on remplace encore

$$\cos(8.\theta) = 128.\cos^8(\theta) - 256.\cos^6(\theta) + 160.\cos^4(\theta) - 32.\cos^2(\theta) + 1$$

Et on n'a pas besoin des puissances impaires.

◁ 59 ▷

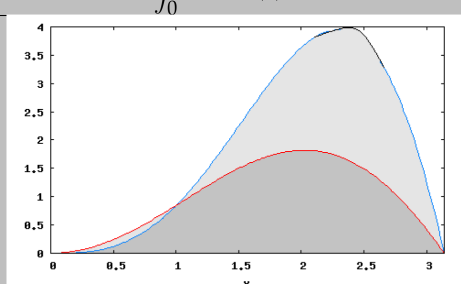
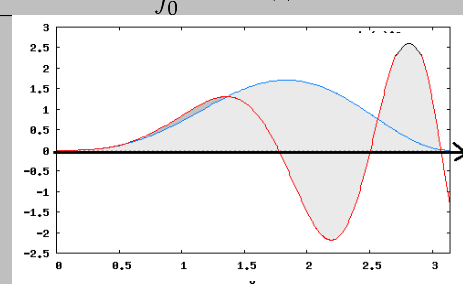
♡ On définit $ch = x \longmapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Montrez que ch est strictement croissante sur $[0,\ +\infty[$.
Montrez pour tout x : $ch(3.x) = 4.ch^3(x) - 3.ch(x)$.
Montrez que l'équation $ch(t) = \alpha$ d'inconnue t et de paramètre α plus grand que 1 admet pour solution $t = \ln(\sqrt{\alpha^2 - 1} + \alpha)$.

On veut résoudre $4.x^3 - 3.x = a$ (notée E) d'inconnue réelle x avec a plus grand que 1. Montrez grâce à un tableau de variations que l'équation admet une unique solution et que cette solution est plus grande que 1.
On pose alors $T = \ln(\sqrt{x^2 - 1} + x)$ et $t = \ln(\sqrt{a^2 - 1} + a)$ (existences ?). Montrez que l'équation E est équivalente à $ch(3.T) = ch(t)$ puis $T = t/3$.
Exprimez alors la solution x_0 de E à l'aide de ch, ln et $\sqrt{\ }$.
Retrouvez les formules de Cardan (ou plutôt, trouvez » puisque vous n'avez pas à les connaître).

On veut résoudre $z^3 - 6.z^2 + 9.z = 6$. Commencez par éliminer le terme $6.z^2$ par une translation.
Montrez que par une homothétie, on se ramène à l'équation $4.x^3 - 3.x = 2$.
Résolvez par la méthode du cosinus hyperbolique.

◁ 60 ▷

♡ Calculez

$\displaystyle\int_0^\pi t.\sin(t).dt$	$\displaystyle\int_0^\pi t^2.\sin(t).dt$	$\displaystyle\int_0^\pi t.\sin^2(t).dt$	$\displaystyle\int_0^\pi t.\sin($
			

Par parties pour les deux premières. Ou en prenant une forme $(a.t + b).\sin(t) = (c.t + d).\cos(t)$ pour le premier, qu'on dérive et identifie...

La troisième nécessite une linéarisation : $t.\sin^2(t) = t.\dfrac{1 - \cos(2.t)}{2}$ puis une intégration par parties.

$\displaystyle\int_0^\pi t.\sin(t).dt$	$\displaystyle\int_0^\pi t^2.\sin(t).dt$	$\displaystyle\int_0^\pi t.\sin^2(t).dt$	$\displaystyle\int_0^\pi t.\sin(t^2).dt$
$\sin(t) - t.\cos(t)$	$(2 - t^2).\cos(t) + 2.t.\sin(t)$	$\dfrac{t^2}{4} - \dfrac{\cos(2.t)}{8} - \dfrac{t.\sin(2.t)}{4}$	$-\dfrac{\cos(t^2)}{2}$
π	$\pi^2 - 4$	$\dfrac{\pi^2}{4}$	$\dfrac{1 - \cos(\pi^2)}{2}$

◃61▹

♡ a - Sans calculatrice : prouvez $(1,01)^{100} > 2$.
b - Sans calculatrice, prouvez : $\dfrac{100\,001}{1\,000\,001} > \dfrac{1\,000\,001}{10\,000\,001}$.
c - Sans calculatrice, prouvez : $4^{53} > 5^{45}$ (idée : 125 et 128).
d - Sans calculatrice, donnez les vingt premiers chiffres de l'écriture décimale de $(\sqrt{1\,001} - \sqrt{1\,000})^{12}$.

a - On développe $(1 + 0,01)^{100}$ par la formule du binôme. Les deux premiers termes valent $1 + \binom{100}{1} \times 0,01$ ce qui fait déjà 2, et les suivants sont positifs.

---

b - $\dfrac{10^{n-1}+1}{10^n+1} > \dfrac{10^n+1}{10^{n+1}+1}$ est la formule générale qu'on prouve par produit en croix :
$(10^{n-1}+1).(10^{n+1}+1) > (10^n+1)^2$ et c'est vrai par $10^{n+1} + 10^{n-1} > 2.10^n$.

---

c - $4^{53} = 2^{106} = 2.2^{107} = 2.(2^7)^{15} = 2.(128)^{15}$
$5^{45} = (5^3)^{15} = (125)^{15}$
Déjà 128^{15} dépasse 125^{15}. C'est pire ensuite.

Variante : D'un côté 2^{106}. De l'autre 5^{45}.
Mieux : $(2^7)^{15}.2$ face à $(5^3)^{15}$.
Or, $2^7 = 128 > 125 = 5^3$.
Par exponentiation encore : $(2^7)^{15} > (5^3)^{15}$ et a fortiori : $4^{53} > 5^{45}$.

Et avec calculatrice

4^{53}	=	81	129	638	414	606	681	695	789	005	144	064
5^{45}	=	28	421	709	430	404	007	434	844	970	703	125

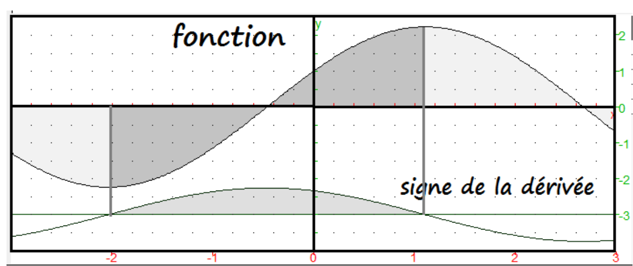
$(\sqrt{1\,001} - \sqrt{1\,000})^{12}$ ne doit pas être loin de 0. C'est d'ailleurs $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1001}+\sqrt{1000}}\right)^{12}$.
On majore $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1001}+\sqrt{1000}}\right)^{12} \leqslant \left(\dfrac{1}{2.\sqrt{1000}}\right)^{12} \leqslant \dfrac{1}{2^{12}}.\dfrac{1}{10^{3/2}}^{12} \leqslant \dfrac{1}{10^3}.\dfrac{1}{10^{18}}$.
En fait la calculatrice donne 0.24340×10^{-21} soit un bon nombre de 0 pour commencer.

◃62▹

♡ Donnez l'intervalle le plus grand possible contenant 0 sur lequel $x \longmapsto \cos(x) + 2.\sin(x)$ est injective.

Méthode 1 : approche cours de physique.
On l'écrit $x \longmapsto A.\cos(x - \varphi)$ avec $A = \sqrt{5}$ et $\varphi = Arctan(2)$ (cours).
Après translation, on veut donc un cosinus injectif. C'est jouable sur un intervalle de longueur π tel que $[0,\ \pi]$ ou $[-\pi,\ 0]$.
On va demander à $x - \varphi$ de rester entre $-\pi$ et 0.
On trouve donc $[Arctan(2) - \pi,\ Arctan(2)]$.

Méthode 2 : approche « cours de Terminale ».
On dérive. La dérivée est positive en 0. on cherche quand elle s'annule et change de signe.
$-\sin(x) + 2.\cos(x) = 0$ pour $\tan(x) = 2$.
On a donc $Arctan(x)$ et ses translatés modulo π.
Au delà de 0, c'est $Arctan(2)$. Avant 0 c'est $Arctan(2) - \pi$.



◃63▹

Combien l'équation $a.b = 10!$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

Il y a un proverbe chinois qui ne dit rien.
J'aime bien le citer quand je n'ai rien à dire.
Philippe GELUCK (le Chat)

Pour l'équation $a.b = 10!$, il suffit de trouver les diviseurs a de 10!. Pour chaque a, il y a un unique b.
Et on va chercher les solutions positives. En effet, pour un couple tel que $(120,\ 30240)$, on aura aussi $(-120,\ -30240)$.
Alors, qui sont les diviseurs de 10! ? Déjà, on écrit 10! comme produit de facteurs premiers.
$(1).(2).(3).(2^2).(5).(2.3).(7).(2^3).(3^2).(2.5) = 2^8.3^4.5^2.7$.

Les nombres a ne peuvent contenir que des facteurs 2, 3, 5 et 7. Et encore, avec des exposants pas trop grands.

On va écrire $a = 2^\alpha.3^\beta.5^\gamma.7^\delta$ et $a = 2^{8-\alpha}.3^{4-\beta}.5^{2-\gamma}.7^{1-\delta}$ avec $\begin{array}{lll} \alpha & \text{dans} & \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\} \\ \beta & \text{dans} & \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\} \\ \gamma & \text{dans} & \{0,\ 1,\ 2\} \\ \delta & \text{dans} & \{0,\ 1\} \end{array}$

On a au total 9.5.3.2 couples, que l'on double pour les histoires de signes.

Au total $\boxed{\text{540 solutions}}$ dont la liste ne sera pas donnée ici.

La question « le nombre de diviseurs de $2^a.3^b.5^d\ldots$ est égal à $(1+a).(1+b).(1+c)\ldots$ » fut longtemps un classique de Terminale.

Sinon, on pouvait aussi proposer

```
F = 1
for k in range(10) :
....F *= k+1
NbDiv = 0
for k in range(1, F+1) :
....if F%k == 0 :
........NbDiv +=1
print(2*NbDiv)
```

◁64▷ ♡ Bintou vient d'avoir un 20. Sa moyenne est donc passée de 13,5 à 14. Elle vous demande quelle note elle doit avoir à l'I.S. suivante pour que sa moyenne passe à 14,3 ?

On note n le nombre de devoirs déjà faits, et S la somme des notes. On a don, avant son m20 : $\dfrac{S}{n} = 13,5$.

Avec un 20, on a $\dfrac{S+20}{n+1} = 14$. Deux équations, deux inconnues, c'est bon. $n = 12$ et $S = 162$.

On veut la note suivante, pour avoir $\dfrac{S+20+s}{n+2} = 14,3$. Il lui faut quand même 18,2 !

Sinon, Bintou est un prénom d'Afrique subsaharienne.
je l'utilisais pour des exercices afin d'éviter les célèbres Alice, Bob et Charlie des exercices où on peut ensuite les appeler A, B et C.
J'avais donc par exemple Augustin, Bintou et Chloé.
Et en plus, ça a fait plaisir à une de nos femmes de ménage qui a entendu un jour des élèves de MPSI2 réfléchissant à un exercice « mais si Bintou est à côté de Chloé, que fait Augustin ». Elle se prénomme Bintou, justement.

◁65▷ Où est l'erreur dans le raisonnement suivant : « on sait $\begin{array}{lll} x=1 & \Rightarrow & x+2=3 \\ x=3 & \Rightarrow & 2.x+2=8 \end{array}$ on déduit en additionnant $(2.x=4) \Rightarrow (3.x+4=11)$ ».

Oui, les implications $\begin{array}{lll} x=1 & \Rightarrow & x+2=3 \\ x=3 & \Rightarrow & 2.x+2=8 \end{array}$ sont correctes, et la conclusion par addition $(2.x=4) \Rightarrow (3.x+4=11)$ est absurde.

Une réponse possible est « *on n'additionne pas des hypothèses et des conclusions, ça n'a pas de sens* ».

Regardons quand même d'un peu plus près : on a deux implications $a \Rightarrow b$ et $\alpha \Rightarrow \beta$.
On est en droit d'en déduire $(a \text{ et } \alpha) \Rightarrow (\alpha \text{ et } \beta)$. Sauf qu'ici a *et* α est un truc incompatible, qui n'a d'ailleurs rien à voir avec la somme des deux égalités.

D'ailleurs, la relation obtenue par somme est au mieux une conséquence de chacune des deux relations a et α. Ainsi, on aurait $(a \text{ et } \alpha) \Rightarrow (b \text{ et } \beta)$ et aussi $(a \text{ et } \alpha) \Rightarrow (somme(a,\alpha))$, ce qui ne permet en rien d'induire $(somme(a,\alpha)) \Rightarrow (b \text{ et } \beta)$.

Enfin, additionner des hypothèses est idiot : « $x = 1$ et $x = 3$ » ne donne pas $2.x = 4$, mais donne Faux.

Après ces réponses, il me reste une question : pourquoi êtes vous quand même capables de construire des « démonstrations » utilisant ce type d'argument stupide ? Juste pour que ça marche ? Juste parce que ça ressemble à ce que vous appelez des maths ?

◁66▷ ♡A est un ensemble. Que signifient :

$\forall(a,\ b)\in A^2,\ a=b$	$\exists(a,\ b)\in A^2,\ a=b$
$\exists(a,\ b)\in A^2,\ \forall x\in A,\ x=a\ ou\ x=b$	$\forall(a,\ b)\in A^2,\ a\neq b$
$\exists(a,\ b)\in A^2,\ \forall x\in A,\ x\neq a\ \Rightarrow\ x=b$	$\exists(a,\ b)\in A^2,\ a\neq b$
$\exists(a,\ b)\in A^2,\ \forall x\in A,\ x\neq a\ \Leftrightarrow\ x=b$	

$\forall(a,\ b)\in A^2,\ a=b$	A n'a qu'un élément, ou même aucun
$\exists(a,\ b)\in A^2,\ \forall x\in A,\ x=a\ ou\ x=b$	A est de cardinal 2 (pour $a\neq b$) ou 1 ($a=b$)
$\exists(a,\ b)\in A^2,\ \forall x\in A,\ x\neq a\ \Rightarrow\ x=b$	A est encore de cardinal 2 ou 1 (c'est comme dessus)
$\exists(a,\ b)\in A^2,\ \forall x\in A,\ x\neq a\ \Leftrightarrow\ x=b$	A est vraiment de cardinal 2
$\exists(a,\ b)\in A^2,\ a=b$	A contient au moins un élément (prendre $b=a$)
$\forall(a,\ b)\in A^2,\ a\neq b$	impossible car on peut prendre $b=a$, donc A est vide
$\exists(a,\ b)\in A^2,\ a\neq b$	le cardinal de A vaut au moins 2

◁67▷ ♡ Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k-1}{k!}$ en y trouvant la somme télescopique cachée.

Cette fois, c'est $\dfrac{1}{(k-1)!}-\dfrac{1}{k!}$. Et la somme vaut $-1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}$. On trouve $\boxed{\dfrac{-1}{n!}}$ *(et le signe s'explique par le premier terme négatif, à traiter à part).*

◁68▷ Le polynôme complexe P de degré 4 a pour racines a, b, c et d. P' a pour racines α, βet γ.
Montrez pour z dans $\mathbb{C}-\{a,b,c,d\}$: $\overline{\dfrac{P'(z)}{P(z)}}=\overline{\left(\dfrac{1}{z-a}+\dfrac{1}{z-b}+\dfrac{1}{z-c}+\dfrac{1}{z-d}\right)}=\dfrac{z-a}{|z-a|^2}+\dfrac{z-d}{|z-b|^2}+\dfrac{z-c}{|z-c|^2}+\dfrac{z-d}{|z-a|^2}$.
Déduisez qu'il existe quatre réels positifs λ_1 à λ_4 vérifiant $\alpha=\dfrac{\lambda_1.a+\lambda_2.b+\lambda_3.c+\lambda_4.d}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}$.
Déduisez que le triangle de sommets α, β et γ est inscrit dans le quadrilatère de sommets a, b, c et d.
Montrez que les deux racines de P'' et la racine de $P^{(3)}$ sont aussi dans ce triangle.

On écrit $P(z)=\lambda.(z-a).(a-b).(z-c).(z-d)$ en n'oubliant pas un λ en facteur devant.

On dérive : $$\begin{array}{lllll} P'(z)= & \lambda.1 & .(z-b) & .(z-c) & .(z-d) \\ & +\lambda.(z-a) & .1 & .(z-c) & .(z-d) \\ & +\lambda.(z-a) & .(z-b) & .1 & .(z-d) \\ & +\lambda.(z-a) & .(z-b) & .(z-c) & .1 \end{array}.$$

On divise par $\lambda.(z-a).(a-b).(z-c).(z-d)$. Le complexe λ disparait...

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}+\frac{1}{z-c}+\frac{1}{z-d}$$

On peut généraliser. On peut aussi justifier en dérivant $\ln(P(z))=\ln(\lambda)+\lambda.\ln(z-a)+\lambda.\ln(z-b)+\lambda.\ln(z-c)+\lambda.\ln(z-d)$ quitte à définir un logarithme complexe.

On conjugue (conjugué de la somme égale somme des conjugués, idem pour le produit, le quotient) :

$$\frac{\overline{P'(z)}}{\overline{P(z)}}=\overline{\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}+\frac{1}{z-c}+\frac{1}{z-d}}$$

On remplace chaque $\overline{\dfrac{1}{z-r}}$ par $\dfrac{1}{\overline{z-r}}$.

On multiplie haut et bas par $z-r$ (conjugaison) : $\overline{\dfrac{1}{z-r}}=\dfrac{z-r}{(z-r).\overline{(z-r)}}=\dfrac{z-r}{|z-r|^2}$.

Et surtout, on ne transforme pas $|z-r|$ en $\sqrt{(x_r-x)^2+(y_r-y)^2}$.

On somme donc : $\overline{\dfrac{P'(z)}{P(z)}} = \dfrac{z-a}{|z-a|^2} + \dfrac{z-b}{|z-b|^2} + \dfrac{z-c}{|z-c|^2} + \dfrac{z-d}{|z-d|^2}$. Pourquoi pas.

On prend pour z une valeur α, racine du polynôme P'.
Ayant supposé que les quatre racines de P étaient distinctes, les trois racines de P' sont distinctes des racines de P.
On n'a pas de racine double.
On a donc $\dfrac{P'(\alpha)}{P(\alpha)} = 0$ (un vrai 0 et pas un $\dfrac{0}{0}$). Il vient alors

$$\frac{\alpha-a}{|\alpha-a|^2} + \frac{\alpha-b}{|\alpha-b|^2} + \frac{\alpha-c}{|\alpha-c|^2} + \frac{\alpha-d}{|\alpha-d|^2} = 0$$

On fait passer d'un même côté les termes en α :

$$\frac{\alpha}{|\alpha-a|^2} + \frac{\alpha}{|\alpha-b|^2} + \frac{\alpha}{|\alpha-c|^2} + \frac{\alpha}{|\alpha-d|^2} = \frac{a}{|\alpha-a|^2} + \frac{b}{|\alpha-b|^2} + \frac{c}{|\alpha-c|^2} + \frac{d}{|\alpha-d|^2}$$

On se laisse porter et on décide d'appeler λ_1 le réel $\dfrac{1}{|\alpha-a|^2}$ (oui, c'est un réel et même un réel positif). De même pour les trois autres.
Cette fois : $\alpha.(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4) = \lambda_1.a+\lambda_2.b+\lambda_3.c+\lambda_4.d$.
Et la somme des quatre réels est strictement positive :

$$\alpha = \frac{\lambda_1.a+\lambda_2.b+\lambda_3.c+\lambda_4.d}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}$$

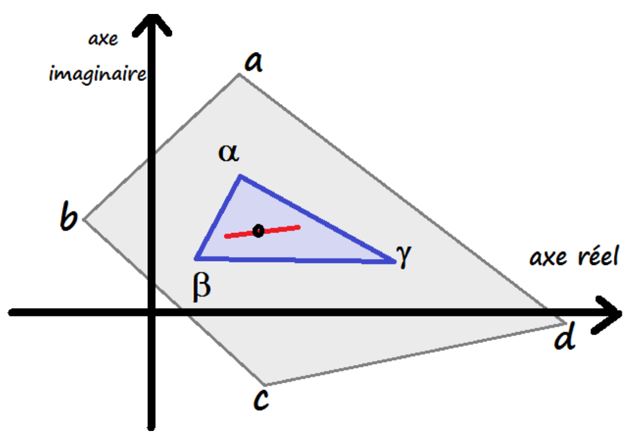
Le complexe α est écrit comme une moyenne de a, b, c et d.
Une moyenne à coefficients positifs.
On appelle ça une moyenne ou un barycentre.
Si les coefficients valaient tous 1, ce serait l'isobarycentre ou centre de gravité.

Ce qui est un peu déroutant c'est que les coefficients dépendent de α.
Mais ils existent et sont positifs.

Géométriquement, qui sont ces barycentres à coefficients positifs des quatre complexes a, b, c et d ?
Ce sont les points du polygone convexe qu'ils délimitent (en fait un quadrilatère sauf si l'un des quatre est déjà dans le triangle délimité par les trois autres).

Et en recommençant, les racines de P'' sont dans le triangle délimité par les racines de P'.

Puis la racine de $P^{(3)}$ est au milieu du segment délimité par les deux racines de P''.
Sur le schéma, on voit le plan complexe de dessus, et on représente juste les racines de P, de P', de P'' et la racine de $P^{(3)}$.
On ne saurait d'ailleurs pas représenter un polynôme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
Par ailleurs, si le polynôme P est à coefficient réels, il y a des racines réelles (a et b devraient être sur l'axe réel par exemple) et des racines complexes deux à deux conjuguées (c et d devant être symétriques de part et d'autre de l'axe réel).



◁69▷ ♡ Augustin-Louis, Hermann-Amandus ! Montrez que $a.\cos(\theta)+b.\sin(\theta)$ est toujours entre $-\sqrt{a^2+b^2}$ et $\sqrt{a^2+b^2}$.

Le produit scalaire de $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ est plus petit que le produit de leurs normes.

◃70▹ Soit P un polynôme de degré n, de racines r_1 à r_n. On note ρ_1 à ρ_{n-1} les racines de P'. Montrez que la moyenne des $r_i$est égale à la moyenne des ρ_j.

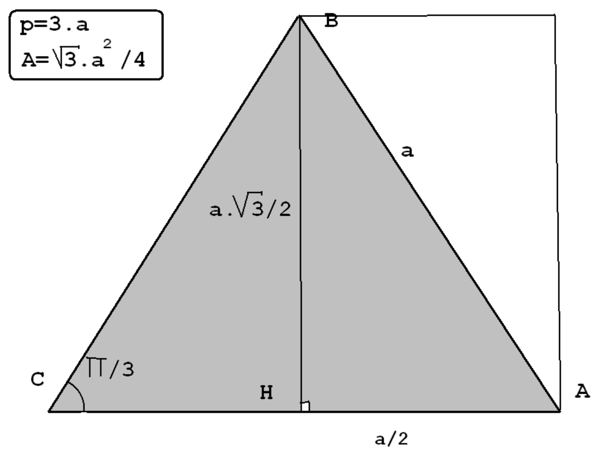
◃71▹ Mon fils a tracé un carré, puis a calculé son périmètre et son aire. Et il a trouvé le même nombre. Quelle est la longueur du côté de ce carré.
∼0) Il me demande alors si il existe un triangle équilatéral dont l'aire est égale au périmètre. Je lui réponds oui. Mais quelle est cette valeur ?
∼1) N'y tenant plus, je me pose la question : quelle est la taille d'un hexagone régulier dont le périmètre et l'aire sont égaux ?

TD04 Un carré d'aire et périmètres égaux.

On note a le côté de ce carré. Son périmètre est alors $4.a$. Son aire est a^2.
On doit donc résoudre l'équation $a^2 = 4.a$ qui admet deux racines : 0 et 4.
On ne garde que la solution $\boxed{a = 4}$ *(rationnelle, disons le tout de suite).*

Pour résoudre $a^2 = 4.a$, il serait idiot de passer par $a^2 - 4.a = 0$ et de calculer le discriminant. Il ne faut pas non plus rater la solution $a = 0$ en divisant à tort l'équation de chaque côté par a sans vérifier s'il est nul ou non. La bonne méthode, c'est de factoriser : $a.(a-4) = 0$.

TD04 Un triangle équilatéral.



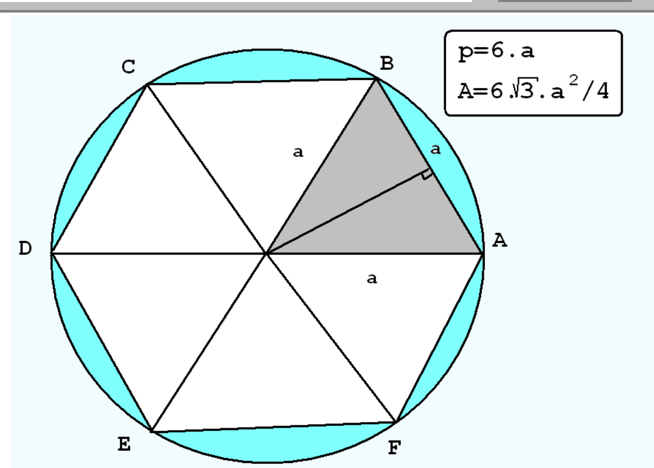
On note là encore a la longueur du côté d'un tel triangle.

Son périmètre vaut naturellement $3.a$.

On découpe ensuite son aire en deux triangles rectangles d'hypoténuse a. On a donc un rectangle de base $a/2$ et de hauteur $a.\sqrt{3}/2$ *(théorème de Pythagore, ou "opposé sur hypoténuse").*

On a donc pour aire $\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$ et pour équation $3.a = \frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$ et pour solution $\boxed{a = 4.\sqrt{3}}$ *(irrationnelle disons le aussi).*

TD04 Cas de l'hexagone régulier.



On note là aussi a le côté. Comme l'hexagone en a six, le périmètre vaut $6.a$.
La surface se découpe en six triangles équilatéraux, chacun de côté a. Chaque triangle a, comme on l'a vu, une aire de $\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$.

L'équation est donc cette fois $6.\frac{a^2.\sqrt{3}}{4} = 6.a$ et elle donne la solution non nulle $\boxed{a = 4/\sqrt{3}}$ ou encore $a = \frac{4.\sqrt{3}}{3}$.

~0) Tenant à généraliser *(tendance naturelle pour un matheux)*, je note, pour tout n, a_n la longueur du côté du polygone régulier à n côtés dont l'aire est égale au périmètre. Donnez moi la formule pour a_n, ainsi que pour le périmètre p_n associé.
~1) Formé à bonne école, un élève généralise la question : pour quel rayon le périmètre du cercle égale-t-il l'aire du disque ? Et il y répond. Cette valeur commune du périmètre et de l'aire du cercle/disque est elle d'ailleurs la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

TD04 Cas du polygône à n côtés.

On note a le côté commun. Le périmètre est évidemment $n.a$.
Le polygone est forme de n triangles isocèles dont le côté unique vaut a. L'angle au centre vaut $2.\pi/n$ puisqu'il en faut n pour faire une tarte complète.
En plaçant "debout" chaque triangle isocèle, on mesure sa base : a. Il faut trouver sa hauteur h par demi triangle isocèle, donc rectangle : $\tan(\pi/n) = \frac{a/2}{h}$. Son aire vaut $\frac{a}{2}.\frac{a}{2.\tan(\pi/n)}$.
L'aire du polygone vaut donc $\frac{n.a^2}{4.\tan(\pi/n)}$. L'équation devient $n.a = \frac{n.a^2}{4.\tan(\pi/n)}$.
On résout en éliminant la solution inutile $a = 0$: $\boxed{a = 4.\tan(\pi/n)}$

On vérifie :

n	3	4	5	6
$4.\tan(\pi/n)$	$4.\sqrt{3}$	4	$4.\tan(\pi/5)$	$4/\sqrt{3}$

TD04 Cas du cercle.

On rappelle les formules pour un cercle de rayon R :

périmètre du cercle	aire du disque
$2.\pi.R$	$\pi.R^2$

La solution est $\boxed{R = 2}$

On se demande maintenant si le cercle peut être vu comme limite de polygones où le nombre de côtés augmente indéfiniment *(d'ailleurs, avez vous déjà regardé comment un logiciel de C.A.O./D.A.O.*[6] *trace des "cercles" ?)*.

Pour le polygone à n côtés, le côté vaut $4.\tan(\pi/n)$ et le périmètre vaut $4.n.\tan(\pi/n)$.
On doit donc trouver la limite de $\frac{4.n.\sin(\pi/n)}{\cos(\pi/n)}$ quand n tend vers l'infini.
Le numérateur est une forme indéterminée et le dénominateur tend vers 1.
Mais en posant $\theta_n = \pi/n$, on reconnaît dans n le facteur π/θ_n.

On doit donc étudier la limite de $\frac{4}{\cos(\pi/n)}.\pi.\frac{\sin(\theta_n)}{\theta_n}$.
On rappelle que $\frac{\sin(\theta)}{\theta}$ tend vers 1 quand θ tend vers 0 (et c'est le cas pour θ_n quand n tend vers l'infini). La limite de p_n est donc $4.\pi$.
Or, pour un rayon de 2, le périmètre d'un cercle vaut $4.\pi$. La coïncidence est notable.

Ayant constaté que a_4 *(cas du carré)* est rationnel, tandis que a_3 et a_6 *(cas du triangle et de l'hexagone)* sont irrationnels, j'en viens à me demander pour quelles valeurs de n le réel a_n est rationnel. Regardons le cas $n = 5$. Montrez que $\cos(\pi/5)$ est racine de l'équation $(4.X^3 - 3.X) + (2.X^2 - 1) = 0$ d'inconnue réelle X. Calculez alors $\cos(\pi/5)$ et $\tan(\pi/5)$. Déduisez que a_5 est irrationnel.

TD04 Cas du pentagone.

La démonstration ci dessus a donné le côté du pentagone répondant à notre question : $4.\tan(\pi/5)$. *La question devient :* $\tan(\pi/5)$ *est elle rationnelle ou irrationnelle ?*[7]

---

6. *conception ou dessin assisté par ordinateur, comme Paint, Photoshop...*
7. *à la question "rationnelle", la réponse sera "non" ; à la question "rationnelle ou irrationnelle", la réponse sera "oui"*

Pour prouver que $\cos(\pi/5)$ est racine de l'équation $(4.X^3 - 3.X) + (2.X^2 - 1) = 0$, on le reporte dans le premier membre :

$$(4.\cos(\pi/5)^3 - 3.\cos(\pi/5)) + (2.\cos^2(\pi/5) - 1) = \cos(3.\pi/5) + \cos(2.\pi/5)$$

d'après les formules trigonométriques de duplication

Or, $2.\pi/5$ et $3.\pi/5$ sont deux angles qui se complètent pour avoir pour somme π. Leurs cosinus sont donc opposés et ont pour somme 0, comme demandé.

Or, le polynôme $4.X^3 + 2.X^2 - 3.X - 1$ a une racine évidente *(c'est -1)*.
Il se factorise donc

$$4.X^3 + 2.X^2 - 3.X - 1 = (X+1).(4.X^2 - 2.X - 1)$$

On résout l'équation du second degré et on trouve que $4.X^3 + 2.X^2 - 3.X - 1$ a pour racines -1, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.
L'une d'entre elles est $\cos(\pi/5)$. Or, $\cos(\pi/5)$ est positif.

Par élimination évidente, il reste juste $\boxed{\cos(\pi/5) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$

On élève au carré, on passe à l'inverse, on soustrait 1 *(formule $\dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$)* :

$$\tan^2(\pi/5) = \frac{16}{1+5+2.\sqrt{5}} - 1 = \frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = 5 - 2.\sqrt{5}$$

(après usage de la quantité conjuguées).

Par positivité *(entre 0 et $\pi/4$)*, on a donc $\tan(\pi/5) = \sqrt{5 - 2.\sqrt{5}}$.

Ce nombre n'a vraiment pas l'air rationnel. Il ne l'est pas.
Si il l'était *(raisonnement par l'absurde)*, son carré le serait aussi, puis par soustraction, $\sqrt{5}$ serait rationnel, ce qui n'est pas vrai.

$\sim$0) Exprimez $\tan(a+b)$ à l'aide de $\tan(a)$ et $\tan(b)$ pour tout couple $(a,\ b)$ de réels convenables *(ni a, ni b, ni $a+b$ n'est dans $\{\frac{2.k+1}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$)*.
$\sim$1) Exprimez $\tan(2.\theta)$, $\tan(3.\theta)$ et $\tan(4.\theta)$ à l'aide de $\tan(\theta)$, pour θ convenable *(par exemple compris entre 0 et $\pi/8$)*.
$\sim$2) Montrez que pour tout n, il existe deux polynômes P_n et Q_n vérifiant $\tan(n.\theta) = \dfrac{P_n(\tan(\theta))}{Q_n(\tan(\theta))}$. Montrez qu'on peut écrire $P_{n+1}(X) = P_n(X) + X.Q_n(X)$ et exprimez alors Q_{n+1} à l'aide de $P_n$et Q_n.
$\sim$3) Montrez que P_n et Q_n sont toujours à coefficients entiers.
$\sim$4) Quel est leur degré ?
$\sim$5) Exprimez P_{2n} et Q_{2n} à l'aide de $P_n$et Q_n.
$\sim$6) Exprimez P_{2n+1} à l'aide de P_{2n-1} et Q_{2n-1}. Montrez que dans $P_{2n+1}(X)$ le terme en X^{2n+1} a pour coefficient $(-1)^n$.
$\sim$7) On suppose qu'un rationnel α/β (α et β entiers sans diviseur commun) vérifie $P_{2n+1}(\alpha/\beta) = 0$. En multipliant par β^{2n+1} montrez que β divise α^{2n+1}.
$\sim$8) Déduisez que les racines rationnelles de P_{2n+1} sont des entiers. Déduisez que a_{2n+1} est irrationnel.

TD04 — Expression de $\tan(n.\theta)$ comme fraction en $\tan(\theta)$.

Pour a et b convenables, on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a).\cos(b) + \cos(a).\sin(b)}{\cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)} = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a).\tan(b)}$$

C'est la formule demandée, avec les conditions d'existence des diverses tangentes.

Dans le cas particulier, avec $a = b = \theta$ et $t = \tan(\theta)$: $\tan(2.\theta) = \dfrac{2.t}{1-t^2}$.
On a ensuite :

$$\tan(2.\theta + \theta) = \frac{\tan(\theta) + \tan(2.\theta)}{1 - \tan(\theta).\tan(2.\theta)} = \frac{t + \dfrac{2.t}{1-t^2}}{1 - t.\dfrac{2.t}{1-t^2}} = \frac{3.t - t^3}{1 - 3.t^2}$$

Ensuite, qu'on passe par $\tan(2.(2.\theta))$ ou par $\tan(\theta+3.\theta)$ on a $\tan(4.\theta) = \dfrac{4.t-4.t^3}{t^4-6.t^2+1}$
A ce stade, on a exprimé les premières tangentes comme fractions en la variable t.

Avec les notations suggérées : $\tan(n.\theta) = \dfrac{P_n(t)}{Q_n(t)}$:

n	0	1	2	3	4
$P_n(t)$	0	t	$2.t$	$3.t-t^3$	$4.t-4.t^3$
$Q_n(t)$	1	1	$1-t^2$	$1-3.t^3$	$1-6.t^2+t^4$

Les deux premières colonnes ne sont pas demandées, mais elles n'en sont pas moins cohérentes...

On montre l'existence des polynômes P_n et Q_n par récurrence sur n. La récurrence a été initialisée, puisque les premiers polynômes existent.
On suppose ensuite pour un n donné quelconque que P_n et Q_n existent. Il faut alors montrer l'existence de P_{n+1} et Q_{n+1} c'est à dire, ici, les construire.

On écrit pour tout θ convenable : $\tan((n+1).\theta) = \tan(n.\theta+\theta) = \dfrac{\tan(\theta)+\tan(n.\theta)}{1-\tan(\theta).\tan(n.\theta)}$

On remplace par hypothèse de récurrence au rang n : $\tan((n+1).\theta) = \dfrac{t+\dfrac{P_n(t)}{Q_n(t)}}{1-t.\dfrac{P_n(t)}{Q_n(t)}} = \dfrac{t.Q_n(t)+P_n(t)}{Q_n(t)-t.P_n(t)}$

On pose alors naturellement pour les construire : $\boxed{P_{n+1}(t) = t.Q_n(t)+P_n(t)}$ $\boxed{Q_{n+1}(t) = Q_n(t)-t.P_n(t)}$

Ils existent, mais il faut encore préciser que ce sont bien des polynômes, comme produits et sommes de polynômes. La récurrence s'achève.

C'était une récurrence sur le modèle "$P_n$et Q_n existent" implique "P_{n+1}et Q_{n+1} existent" ; et non pas une récurrence sur une formule avec égalité comment en Terminale.

Avec les formules ci dessus, on montre alors que chacun de ces polynômes est bien à coefficients entiers.

C'est le cas des premiers, encadrés plus haut.

Si on suppose ensuite pour un n donné quelconque que $P_n(X)$ et $Q_n(X)$ sont à coefficients entiers, alors $X.P_n(X)$ et $X.Q_n(X)$ le sont aussi *(tout est décalé d'un degré)*. Les combinaisons $P_{n+1}(X)$ et $Q_{n+1}(X)$ le sont donc aussi, et la récurrence s'achève.

Attention, on travaille sur l'existence des polynômes et sur quelques informations sur eux, mais on n'a pas encore de formule explicite pour tous leurs coefficients. Patience.

Pour le degré, c'est un peu moins évident. On allonge donc la liste, avec la double formule de récurrence

n	0	1	2	3	4	5	6
$P_n(X)$	0	X	$2.X$	$3.X-X^3$	$4.X-4.X^3$	$5.X-10.X^3+X^5$	$6.X-20.X^3+6.X^5$
$Q_n(X)$	1	1	$1-X^2$	$1-3.X^2$	$1-6.X^2+X^4$	$1-10.T^2+5.T^4$	$1-15.X^2+15.X^4-X^6$

On va distinguer suivant la parité de n :

n	$n=2.k$ pair	$n=2.k+1$ impair
$deg(P_n)$	$2.k-1=n-1$	$2.k+1=n$
$deg(Q_n)$	$2.k=n$	$2.k=n-1$

La récurrence est initialisée avec le tableau ci-dessus.

On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un n donné. Il faut le faire passer à $n+1$. Mais il faut distinguer deux cas.

• Si n est pair,

$\deg(P_n)=n$	$\deg(X.P_n)=n+1$	$deg(X.Q_n+P_n)=n$	
	$deg(Q_n)=n$		$deg(P_{n+1})=n$
	$deg(P_n)=n$		$deg(Q_{n+1})=n+1$
$\deg(Q_n)=n-1$	$deg(X.Q_n)=n$	$deg(Q_n-X.P_n)=n+1$	

La formule est cohérente puisque $n+1$ est impair et que $(n+1)-1$ vaut n.

• Si n est impair *(et $n+1$ pair)*,

$\deg(P_n) = n-1$	$\deg(X.P_n) = n$	$deg(X.Q_n + P_n) = n$	
	$deg(Q_n) = n$		$deg(P_{n+1}) = n+1$
	$deg(P_n) = n-1$		$deg(Q_{n+1}) = n = (n+1)-1$
$\deg(Q_n) = n$	$deg(X.Q_n) = n+1$	$deg(Q_n - X.P_n) = n$	

Les deux cas ayant été traités, l'hérédité est démontrée.

Pour trouver P_{2n} et Q_{2n}, il suffit d'écrire

$$\tan(2.n.\theta) = \tan(2.(n.\theta)) = \frac{2.\tan(n.\theta)}{1-\tan^2(n.\theta)} = \frac{2.P_n(t)/Q_n(t)}{1-(P_n(t)/Q_n(t))^2} = \frac{2.P_n(t).Q_n(t)}{(Q_n(t))^2-(P_n(t))^2}$$

et d'identifier

$P_{2n}(X) = 2.P_n(X).Q_n(X)$	$Q_{2n}(X) = (Q_n(X))^2 - (P_n(X))^2$

(c'était astucieux ou c'était évident ?)

TD04 Les racines de P_{2n+1}.

En prenant les cas particuliers de $2n-1$ et $2n$ en lieu et place de n dans les formules $\boxed{P_{n+1}(X) = X.Q_n(X) + P_n(X)}$ $\boxed{Q_{n+1}(X) = Q_n(X) - X.P_n(X)}$ on trouve $\boxed{P_{2n}(X) = X.Q_{2n-1}(X) + P_{2n-1}(X)}$ $\boxed{Q_{2n}(X) = Q_{2n-1}(X) - X.P_{2n-1}(X)}$ et $\boxed{P_{2n+1}(X) = X.Q_{2n}(X) + P_{2n}(X)}$ $\boxed{Q_{2n+1}(X) = Q_{2n}(X) - X.P_{2n}(X)}$ et on reporte :

$P_{2n+1}(X) = 2.X.Q_{2n-1}(X) - X^2.P_{2n-1}(X) + P_{2n-1}(X)$

On l'avait aussi avec $\tan((2n+1).x) = \dfrac{\tan(2.x)+\tan((2n-1).x)}{1-\tan(2.x).\tan((2n-1).x)} = \dfrac{\dfrac{2.t}{1-t^2}+\dfrac{P_{2n-1}(t)}{Q_{2n-1}(t)}}{1-\dfrac{2.t}{1-t^2}.\dfrac{P_{2n-1}(t)}{Q_{2n-1}(t)}}$.

On a trouvé P_1, P_3 et P_5.

On confirme

n	0	1	2
$P_{2n+1}(X)$	X	$3.X - X^3$	$5.X - 10.X^3 + X^5$
terme en X^{2n+1}	X	$-X^3$	X^5

La récurrence sur le terme en X^{2n+1} de P_{2n+1} est amorcée.
On passe à l'hérédité. On suppose que P_{2n-1} commence pour un n donné par $(-1)^{n-1}.X^{2n-1}$. On veut passer au rang impair suivant $P_{2(n+1)-1} = P_{2n+1}$.
On cherche dans $P_{2n+1}(X) = 2.X.Q_{2n-1}(X) - X^2.P_{2n-1}(X) + P_{2n-1}(X)$ le terme de degré $2n+1$. Il ne peut venir que de $-X^2.P_{2n-1}(X)$ et il vaut $-X^2.((-1)^{n-1}.X^{2n-1})$.La récurrence s'achève.

On suppose que α/β est racine de P_{2n+1}. On a donc $(-1)^n.\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2n+1} + autres\ termes = 0$. Proprement, en donnant des noms aux autres coefficients du polynôme :

$$(-1)^n.\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2n+1} + c_{2n}.\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2n} + c_{2n-1}.\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2n-1} + \ldots + c_0 = 0$$

On multiplie par β^{2n+1} pour éliminer les dénominateurs :

$$(-1)^n.\alpha^{2n+1} + c_{2n}.\beta.\alpha^{2n} + c_{2n-1}.\beta^2.\alpha^{2n-1} + \ldots + c_0.\beta^{2n+1} = 0$$

Dans la somme $c_{2n}.\beta.\alpha^{2n} + c_{2n-1}.\beta^2.\alpha^{2n-1} + \ldots + c_0.\beta^{2n+1}$, on peut factoriser β, et ce qu'il reste après factorisation est un entier

$$c_{2n}.\alpha^{2n} + c_{2n-1}.\beta.\alpha^{2n-1} + \ldots + c_0.\beta^{2n}$$

Le nombre $c_{2n}.\beta.\alpha^{2n} + c_{2n-1}.\beta^2.\alpha^{2n-1} + \ldots + c_0.\beta^{2n+1}$ est un multiple de β. Son opposé aussi, et c'est α^{2n+1} *(au signe près, ce qui ne change rien)*.

Mais si β divise α^{2n+1} il y a comme un problème, puisque α et β n'ont même pas de facteur commun *(fraction irréductible)*. La seule façon de s'en sortir, c'est d'avoir $\beta = 1$.
Ainsi, si P_{2n+1} admet une racine rationnelle α/β, alors le dénominateur vaut 1. La conséquence est que cette racine est un entier en $\alpha/1$.

On met bout à bout les résultats. Pour tout n et tout x $\tan((2n+1).x) = \dfrac{P_{2n+1}(\tan(x))}{Q_{2n+1}(\tan(x))}$. En particulier, pour $x = \pi/(2n+1)$, on a

$$0 = \frac{P_{2n+1}(\tan(\pi/(2n+1)))}{Q_{2n+1}(\tan(\pi/(2n+1)))}$$

On en déduit que $\tan\left(\dfrac{\pi}{2n+1}\right)$ est racine du polynôme P_{2n+1}.

Ce nombre peut il être rationnel ? Si c'est le cas, alors c'est un entier. Mais $\tan\left(\dfrac{\pi}{2n+1}\right)$ est entre 0 et $\tan(\pi/3)$. Le seul entier entre ces deux nombres est 1. Et 1 c'est $\tan(\pi/4)$ et pas $\tan(\pi/(2n+1))$. On tient la contradiction.

Bref, $\tan(\pi/(2n+1))$ ne peut pas être rationnel.

◁72▷

1	3	2					4
		1	4	3	2		1
1	4		4	1		4	3
	1	5		5	5	3	
		1	5				
4	3	3			5	5	5
2	4	3			9	3	
			4	1	3		

3	1	2	1		4	3	
					2		
1	4	3		3	1	4	
4			2	1	3	3	
4			1			3	4
2	3		2		4	2	1
	1	4	1	3			5
				3			

La grille doit être découpée en « maisons » (suites des cases contigües par au moins un côté. Dans une maison de taille n toutes les cases sont marquées « n ». Deux maisons de même taille ne peuvent pas avoir de côté commun. Complétez.

1	3	2	2	3	3	4	4
3	3	1	4	3	2	4	1
1	4	4	4	1	2	4	3
4	1	5	5	5	5	3	3
4	4	1	5	9	9	9	9
4	3	3	9	9	5	5	5
2	4	3	9	9	9	3	5
2	4	4	4	1	3	3	5

3	1	2	1	4	4	3	3
3	3	2	4	4	2	2	3
1	4	3	3	3	1	4	4
4	4	2	2	1	3	3	4
4	3	3	1	4	4	3	4
2	3	2	2	4	4	2	1
2	1	4	1	3	5	2	5
4	4	4	3	3	5	5	5

◁73▷

Est il vrai que la consommation en essence d'une voiture est une aire ?

Une voiture consomme de l'essence. Et cette essence lui sert à parcourir des distances.
La quantité d'essence se mesure en litres.
La distance parcourue en kilomètres.
Et vous dites « tant de litres pour cent kilomètres »
La consommation est donc en litres par kilomètre.
Mais un litre est un volume. Cube d'une longueur.
On divise par une longueur. On a un carré de longueur.
C'est bien une aire.

◁74▷

♡ On note T_n le n^{ieme} polynôme de Tchebychev. Calculez $T_{12}\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$.

Partant de $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2.\theta)}{2}$, on a $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
On a donc immédiatement

$$T_{12}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) = \cos\left(12.\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

◁75▷

Résolvez $T_n\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ d'inconnue n *(polynômes de Tchebychev)*.

Cette fois, $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
On résout donc $\cos\left(n.\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ d'inconnue n.
Le cas d'égalité des cosinus donne $n.\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3}\ [2.\pi]$ ou $n.\dfrac{\pi}{12} = -\dfrac{\pi}{3}\ [2.\pi]$.
On a donc $\boxed{S_n = \{4 + 24.k.\pi \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{-4 + 24.k.\pi \mid k \in \mathbb{N}^*\}}$ par exemple 4, 20, 28 et ainsi de suite.