Vocabulaire de la topologie sur $\mathbb{R}$.

La topologie, c'est la description des lieux. Et des parties de $\mathbb{R}$. C'est le langage naturel de l'analyse (continuité, limites, fonctions), un peu plus fin que le langage des ε et des η . ce qui va être fait ici est une présentation sur $\mathbb{R}$, avec des « petits intervalles $[a - \alpha, a + \alpha]$ ». On pourra dans sa tête généraliser à $\mathbb{C}$ avec des disques $\{z \in \mathbb{C} \mid |a - z| \leq \alpha\}$, ou dans $\mathbb{R}^3$ avec des Sucris pleins ; voire dans des espaces de fonctions.

Quant on parlera de parties de $\mathbb{R}$, on pourra voir par facilité les intervalles ouverts, fermés, semi-ouverts, semi-fermés, bornés ou non¹, mais aussi des réunions de quelques intervalles, des ensembles comme $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, ou des intersections comme $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, des réunions comme $([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Z}$, ou même des choses que vous n'imaginez pas.

Attention, pour les intersections ou réunions, on prendra soin de distinguer « intersection finie $A \cap B$ » et « intersection infinie $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$ ».

Par exemple, méfiez vous

$$\bigcap_{n \leq N}]0, 2^{-n}[=]0, 2^{-N}[\text{ est toujours de cardinal infini } \quad \text{ tandis que } \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}}]0, 2^{-n}[= \emptyset \text{ est vide}$$

$$\bigcup_{n \leq N}]n, n + 1] =]0, N + 1] \text{ est toujours borné } \quad \text{ tandis que } \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n + 1] =]0, +\infty[\text{ est non borné}$$

Voisinages

Un ensemble A est un voisinage de a si

intuitif	le point a est non seulement dans A , mais il lui reste un peu de place autour
définition	$\exists \alpha > 0, [a - \alpha, a + \alpha] \subset A$
certains livres	$\exists \varepsilon > 0,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset A$

Les deux dernières définition sont équivalentes. Dans un sens : prendre $\varepsilon = \alpha$, dans l'autre prendre $\alpha = \varepsilon/2$. Il suffit d'écartier un peu moins les bras.

Au fait, pourquoi ne prend on pas $\exists \alpha \geq 0, [a - \alpha, a + \alpha] \subset A$ (avec $\alpha \geq 0$ au lieu de $\alpha > 0$) ?

Exemple :

- $[0, 1]$ est un voisinage de $0, 2$: prendre $\alpha = 0, 1$ par exemple (ou un peu plus, ou moins).
- $[0, 1]$ est un voisinage de $0, 98$: prendre $\alpha = 0, 01$ par exemple (ou un peu plus, ou moins).
- $[0, 1]$ n'est pas un voisinage de 1 : pour tout $\alpha > 0$ $[1 - \alpha, 1 + \alpha]$ déborde à droite.
- $[0, 1]$ est voisinage de toute réel a vérifiant $0 < a < 1$: prendre $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \min(a, 1 - a)$ ou $\varepsilon = \min(a, 1 - a)$.

• $\mathbb{Q}$ n'est voisinage d'aucun point, car $[r - \alpha, r + \alpha]$ contient toujours au moins un irrationnel.

Stabilités :

- quand on agrandit un voisinage de A , c'est encore un voisinage de A : (garder le même α et écrire $[-\alpha, a + \alpha] \subset A \subset A'$).

- quand on réduit un voisinage de a , ce n'en est peut être plus un (déjà, si on enlève a lui même !)

- l'intersection de deux voisinages de a est encore un voisinage de A

$$\left(\begin{array}{l} [a - \alpha_1, a + \alpha_1] \subset A_1 \quad [a - \beta, a + \beta] \subset A \cap B \\ \Rightarrow \quad \text{avec} \\ [a - \alpha_2, a + \alpha_2] \subset A_2 \quad \beta = \min(\alpha_1, \alpha_2) \end{array} \right)$$

- l'intersection d'un nombre fini de voisinages de a en est encore un (prendre le plus petit des α_k)

- la réunion de deux voisinages de a est encore un voisinage de A (normal : $A_1 \subset A_1 \cup A_2$).

- la différence symétrique... euh non, a n'est plus dans $A \Delta B$!

L'intersection d'une infinité de voisinages de a n'est plus forcément un voisinage de a : prenez des $[a - 2^{-n}, a + 2^{-n}]$.

1. $[a, b],]a, b[,]a, b],]a, +\infty[,] - \infty, b[\dots$

Ouverts

Un ensemble « ouvert » est un voisinage de tous ses points.

intuitif	tous les points de A ont un peu de place autour d'eux
définition	$\forall a \in A, \exists \alpha > 0,]a - \alpha, a + \alpha[\subset A$
certaines livres	$\forall a \in A, \exists \varepsilon > 0,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset A$

Remarque : • l'ensemble vide est ouvert, *puisque'il n'y a même pas de point a à tester, c'est donc tout bon.*

- un ensemble de cardinal fini ne peut pas être ouvert (*dès qu'il y a un point a dans A , il y a alors dans A un intervalle entier $[a - \alpha, a + \alpha]$).*
- évidemment, ce n'est pas le même α pour tous les points a de A (*d'ailleurs la quantification $\forall a \in A, \exists \alpha > 0, [a - \alpha, a + \alpha] \subset A$ conduit à $A = \emptyset$ ou $A = \mathbb{R}$).*)
- des ensembles comme $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas ouverts : *leurs points sont isolés.*

Exemples : • tout intervalle ouvert $]b, c[$ est ouvert! (*pour a vérifiant $b < a < c$, on peut prendre $\text{Min}(a - b, c - a)/2$*)

- $\mathbb{R}$ est ouvert

Stabilités : • une intersection de deux ouverts A et B est encore un ouvert : *si a est à la fois dans A et B , il existe α et β vérifiant $[a - \alpha, a + \alpha] \subset A$ et $[a - \beta, a + \beta] \subset B$; il ne reste qu'à prendre $\text{Min}(\alpha, \beta)$.*

- une intersection d'un nombre fini d'ouverts reste un ouvert, *par récurrence sur le raisonnement précédent ou avec le minimum de tous les α_i .*
- une réunion d'ouverts est un ouvert : on prend a dans la réunion, il est dans l'un des A_k , on a alors $[a - \alpha, a + \alpha] \subset A_k \subset \bigcup_{i \in I} A_k$.
- rien de joli sur la différence symétrique, et encore moins sur le complémentaire.

Exemples : • toute réunion d'intervalles ouverts $]b, c[$ est ouverte.

Vous pouvez d'ailleurs voir les ouverts comme ça : des réunions d'intervalles ouverts.

Un résultat étonnant juste pour les futur-étoiles : on peut enfermer $\mathbb{Q}$ dans un ouvert de longueur totale 1. Prendre une énumération de $\mathbb{Q}$ sous la forme $n \mapsto u_n$, et considérer $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]u_n - 2^{-n}, u_n + 2^{-n}[$.

Fermés

Un ensemble fermé est un ensemble « stable par passage à la limite »

Intuitif	Si une suite (a_n) de points de A converge, alors sa limite est dans A .
Définition	$\forall (a_n) \in A^n, a_n \rightarrow b \Rightarrow b \in A$

Exemples : • l'ensemble vide est fermé, *puisque là, il n'y a même pas de suite à étudier.*

- $\mathbb{R}$ est fermé, *puisque quand une suite de réels converge... sa limite est réelle.*
- $[\lambda, \mu]$ est fermé, *puisque si une suite convergente vérifie $\forall n, \lambda \leq a_n \leq \mu$ alors par passage à la limite, celle-ci est encore entre λ et μ .*
- $] \lambda, \mu [$ n'est pas fermé, *car la suite $\left(\frac{n \cdot \lambda + \mu}{n + 1}\right)$ reste strictement dans $] \lambda, \mu [$, sa limite λ n'y est pas.*
- $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé, *puisque une suite de rationnels peut converger vers un irrationnel.*
- $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ n'est pas fermé, *des irrationnels peuvent converger vers un rationnel;*
- l'ensemble $\mathbb{Z}$ est fermé, *car quand une suite d'entiers converge, elle est stationnaire et sa limite est un entier.*
- l'ensemble $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ n'est pas fermé, *car il contient une suite qui tend vers 0, alors que 0 n'est pas dans l'ensemble.*
- l'ensemble $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ est fermé, *si une suite à valeurs dans cet ensemble converge, elle est soit stationnaire (et sa limite est donc un des $1/n$), soit convergente vers 0, et justement on a pris 0.*

L'exemple le plus naturel à avoir à l'esprit est « segment », associé au théorème de passage à la limite.

Notez quand même que $[\lambda, +\infty[$ est aussi fermé, en dépit de son écriture « à droite ». En effet, si une suite

(a_n) converge vers b et vérifie $\lambda \leq a_n$ pour tout n , alors le passage à la limite donne encore $\lambda \leq b$.

On pourra envisager des réunions de quelques segments.

Stabilités : • la réunion de deux fermés est un fermé : si une suite (a_n) est à valeurs dans $A \cup B$, alors l'un des deux ensembles (voire les deux) contient une infinité de termes de la suite ; si en plus la suite converge, alors sa limite est dans cet ensemble.

• la réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé : par récurrence sur le résultat précédent.

• l'intersection de deux fermés est un fermé : si la suite convergente (a_n) est à valeurs dans $A \cup B$, alors elle est à valeurs dans A , dont sa limite est dans le fermé A , elle est à valeurs dans B , donc sa limite est aussi dans le fermé B .

• l'intersection d'une famille (même infinie) de fermés est un fermé : même raisonnement, avec $\forall i \in I, \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in A_i$.

En revanche, la réunion d'une infinité de fermés n'est plus forcément un fermé. Prenez $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2^{-n}, 1] =]0, 1]$.

Bilan :	ouvert	intersection finie	réunion quelconque
	fermé	intersection quelconque	réunion finie

Pour les futur-étoiles : l'ensemble triadique de Cantor est un fermé. On peut le voir comme l'ensemble des nombres de $[0, 1]$ dont l'écriture de base 3 (infinie) ne contient pas le chiffre 1. Regardez sa photo de profil sur wikipedia...

Le complémentaire d'un ouvert est un fermé. Le complémentaire d'un fermé est un ouvert.

D'ailleurs, on peut prendre comme définition d'un fermé : complémentaire d'un ouvert.

On montre donc ici : $\boxed{\Omega \text{ est ouvert si et seulement si } \Omega^c \text{ est fermé}}$

Sens direct. On suppose Ω ouvert.

Pour montrer que Ω^c est fermé, on prend une suite (a_n) d'éléments de Ω^c qui converge vers un réel b (quantifier $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \dots$). Il faut montrer que b est dans Ω^c .

Si non, b serait dans Ω . Et comme Ω est ouvert il existe un réel strictement positif α vérifiant $[a - \alpha, a + \alpha] \subset \Omega$. Mais alors, à partir du rang N_α , tous les termes de la suite (a_n) sont dans $[a - \alpha, a + \alpha]$ donc dans Ω , ce qui contredit l'hypothèse « valeurs dans Ω^c ».

Par élimination, b est dans Ω^c .

Sens indirect. On suppose que Ω^c est stable par passage à la limite.

On doit alors montrer que Ω est ouvert. On prend donc a dans Ω . Il faut trouver α vérifiant $[a - \alpha, a + \alpha] \subset \Omega$. Si ce n'était pas le cas, pour tout α , il y aurait au moins un point de Ω^c dans $[a - \alpha, a + \alpha]$.

Pour $\alpha = 1/n$, on obtient au moins un point c_n de Ω^c vérifiant $|c_n - a| \leq 1/n$.

Cela fait une suite de points de fermé Ω^c qui converge par encadrement vers a . Sa limite a devrait être dans Ω^c .

On a encore raisonné par l'absurde, ou par contraposée ?

Bilan : le complémentaire d'un ouvert est un fermé et vice versa.

Je n'ai pas dit « la négation de ouvert est fermé » !

Attention, il existe des ensembles à la fois ouverts et fermés. Par exemple $\mathbb{R}$ et $\emptyset$.

Les phrases du type : « cet ensemble n'est pas ouvert car il est fermé n'a donc aucun sens ».

Et bien sûr il existe des ensembles ni ouverts ni fermés, comme $[0, 1[$, ou même $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Et on refuse aussi les phrases « comme cet ensemble n'est pas ouvert, il est forcément fermé »...

Compacts

Dans $\mathbb{R}$ un compact est un ensemble à la fois fermé et borné.

C'est par exemple le cas des segments $[a, b]$.

Ce sont les ensembles dans lesquels on peut dire « toute suite admet au moins une sous-suite qui converge ».

Le triadique de Cantor est un compact.

Intérieur

On peut définir l'intérieur d'un ensemble A , qu'on note $\overset{\circ}{A}$ si on a une bonne vue, et $Int(A)$ si on n'a pas un traitement de texte évolué.

Intuitif	Il est formé des points de A qui sont « à l'aise dans A », qui ont encore un peu d'espace autour d'eux.
Constructif	On part de A mais on doit exclure les points qui sont « sur le bord ».
Définition	$\overset{\circ}{A} = \{a \in A \mid \exists \alpha > 0, [a - \alpha, a + \alpha] \subset A\}$
Ensembliste	L'intérieur d'un ensemble A est le plus grand ouvert inclus dans A .

Ce sont les points a de A pour lesquels A est carrément un voisinage.

On a toujours $\overset{\circ}{A} \subset A$. On peut avoir $\overset{\circ}{A} \subset A$, il suffit que A soit ouvert. On peut avoir $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, par exemple avec $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exemples :

A	$[0, 1]$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$[0, 1] \cup]1, 2]$
$\overset{\circ}{A}$	$]0, 1[$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$]0, 1[\cup]1, 2[$

Adhérence

L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A .

Il est formé des points qui, même si ils ne sont pas dans A sont limites d'une suite de points de A .

Le mot adhérent peut se voir comme « collé à l'ensemble, ou même déjà dans l'ensemble ». On peut le voir aussi comme « harcelé par les adhérents du parti qui veulent lui refiler leurs tracs... ».

Intuitif	Il est formé des points de $\mathbb{R}$ qui sont collés à A : soit ils en font partie, soit une suite de points de A converge vers eux.
Constructif	On part de A et on ajoute les points qui sont « tout contre ».
Définition	$\overline{A} = \{b \in \mathbb{R} \mid \forall \alpha > 0, [b - \alpha, b + \alpha] \cap A \neq \emptyset\}$ $\overline{A} = \{b \in \mathbb{R} \mid \forall \alpha > 0, \exists a \in A, b - a \leq \alpha\}$ $\overline{A} = \{b \in \mathbb{R} \mid \exists (a_n) \in A^n, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = b\}$
Ensembliste	L'adhérence d'un ensemble A est le plus petit fermé contenant A .

On a toujours $A \subset \overline{A}$. On peut avoir $A = \overline{A}$, il suffit que A soit fermé. On peut avoir $\overline{A} = \mathbb{R}$, par exemple avec $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Propriétés :

$\overline{A^c} = (\overset{\circ}{A})^c$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \bigcup_{k=1}^n \overline{A_k}$	$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
$(\overline{A})^c = \overset{\circ}{A^c}$	$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$	$\bigcup_{k=1}^n \overset{\circ}{A_k} \subset \overset{\circ}{\bigcup_{k=1}^n A_k}$	$\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{A \cap B}$

Formulez ces propriétés avec des mots. Donnez des contre-exemples pour les cas où il n'y a pas égalité, comme $\emptyset = \overline{\mathbb{Q} \cap (\mathbb{Q}^c)} \subsetneq \overline{\mathbb{Q}} \cap (\overline{\mathbb{Q}^c}) = \mathbb{R}$.

Vérifiez les autres propriétés sur des exemples comme $\overline{]0, 1[\cup]3, +\infty[}^c = ([0, 1] \cup [3, +\infty[)^c =]-\infty, 0[\cup]1, 3[$

On parle aussi des valeurs d'adhérence d'une suite (a_n) . C'est l'ensemble des limites des sous-suites $(a_{\varphi(n)})$ quand elles convergent (on ne regarde pas les sous-suites qui divergent, elles n'ont pas de limite).

Exemples : • une suite convergente n'a qu'une valeur d'adhérence : sa limite (*toutes ses sous-suites ont la même limite*).

• la suite $((-1)^n)$ a pour valeurs d'adhérence -1 et 1 (*sous-suites faciles à exhiber, et la suite elle-même ne converge pas*).

• une suite qui diverge vers $+\infty$ n'a pas de valeur d'adhérence (*aucune de ses sous-suites ne converge*).

• toute suite bornée au moins une valeur d'adhérence (*c'est ce que disent Bolzano et Weierstrass*).

• si une suite bornée n'a qu'une valeur d'adhérence, elle converge (*exercice*).

Attention les valeurs d'adhérence de $(a_n + b_n)$ ne sont pas les sommes des valeurs de (a_n) et des valeurs

d'adhérence de $(b_n) : ((-1)^n)$ et $((-1)^{n+1})$.

quand elles convergent.

Exempl

Frontière

Par définition, la frontière est formée des points « juste sur le bord » :

Intuitif	Elle est formé des points qui sont sur le bord de A : (dans A ou pas).
Définition	$Fr(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap (A^c)$

On la note aussi ∂A .

Exemples :	$\overline{A}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\mathbb{Q}$	$]0, 1[$	$\mathbb{Z}$
	$Fr(A)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\{0, 1\}$	$\mathbb{Z}$

Il n'y a pas de formule simple pour la frontière de la réunion, ni pour la frontière de l'intersection.

En revanche, A et son complémentaire ont la même frontière.

Montrez qu'il n'existe pas d'ensemble dont la frontière soit $\mathbb{Q}$.

Déterminez pour les ensembles suivants

A	$\overline{A}$	$\overset{\circ}{A}$	$Fr(A)$	$\overline{\overset{\circ}{A}}$	$\overline{\overline{A}}$	$\overline{\overline{\overset{\circ}{A}}}$	$\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$
$]0, 1[$							
$\mathbb{Q}$							
$(]0, 1[\cap \mathbb{Q}) \cup]2, 3[$							
$\mathbb{Z}$							
$\mathbb{N} \cup \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$							