LMB *MPSI2*

Programme de colle semaine 12 - semaine du 18 décembre

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours. Le cours doit être parfaitement su.

Suites

Suites réelles, même programme que la semaine précédente, avec en plus : valeurs d'adhérence, théorème de Bolzano-Weierstrass.

Extension aux suites complexes

Suites complexes convergentes, bornées. Définition, opérations. u converge si et seulement si $\mathrm{Re}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ convergent.
Exemples : suites géométriques ;pour $z \in \mathbb{C}$, la suite $\left(\frac{z^n}{n!}\right)_n$ converge vers 0, la suite de terme général $(1 + z/n)^n$ converge vers e^z.
Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Vu en exercices :

— techniques d'encadrement (minoration ou majoration "grossière") et encadrement par monotonie intégrale des sommes du type $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ lorsque f continue et monotone. Exemple : encadrement et équivalent de la somme harmonique $\mathrm{H}_n \sim \ln n$)

— le théorème de Cesàro

— étude de suites u définies de manière implicite (u_n défini comme unique solution d'une équation $f_n(x) = 0$.

N.B. Nous n'avons pas encore traité d'exercices du type : $u_{n+1} = f(u_n)$. Cela fera l'objet d'une étude spécifique après le cours sur la dérivabilité et les accroissements finis. Merci de pas posez ce type d'exercices maintenant.

QUESTIONS DE COURS :

1. Exercice (somme harmonique) Utiliser une méthode du type "comparaison intégrale" pour montrer que $\mathrm{H}_n \sim \ln n$.
2. Exercice Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
   (1) Montrer que la suite (S_n) est convergente *(suite croissante et majorée, majoration par comparaison somme/intégrale)*.
   (2) On note $\zeta(2)$ sa limite. Montrer que $\zeta(2) - u_n \sim \frac{1}{n}$ et que $\zeta(2) - (u_n + \frac{1}{n}) = 0\left(\frac{1}{n^2}\right)$
3. Exercice *(théorème de Cesàro)*.
   (1) Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ. Montrer que la suite de terme général $c_n = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$ converge vers ℓ.
   (2) Cas où la suite u tend vers $+\infty$.
4. Exercice
   (1) Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| = 1$ et $q \neq 1$. Montrer que la suite $(q^n)_n$ est divergente.
   (2) En déduire que $(e^{in})_n$ est une suite divergente puis établir que les suites $(\cos(n))_n$ et $(\sin(n)_n$ sont toutes les deux divergentes.
5. Exercice Si u est une suite réelle qui tend vers $+\infty$, montrer qu'il existe une sous-suite de u croissante.

PRÉVISIONS : Structures : groupes, anneaux, corps.

N.B. note aux colleurs : la classe sera à la montagne du **22 au 27 janvier 2024 - pas de colles la semaine correspondante.**