Programme de colle semaine 13 - 8 janvier

Le cours doit être parfaitement su.

Groupes, anneaux, corps

Groupes

1. Définition, exemples de groupes commutatifs ou non, groupe des bijections d'un ensemble. Groupe produit.
2. Sous-groupe : définition, des exemples : $n\mathbb{Z}$ (sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$), groupe des racines n ième de l'unité et groupe des nombres complexes de module 1 (sous-groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$), groupe des similitudes directes (sous-groupe des bijections de $\mathbb{C}$ pour la loi $\circ$)).

   Détermination des sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

   L'intersection d'une famille de sous-groupes est un sous-groupe.
3. Morphisme de groupes. Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Propriétés opératoires. L'image directe ou réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe. Noyau d'un morphisme, caractérisation de l'injectivité.

   La composée de morphismes est un morphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. Groupe des automorphismes d'un groupe.

Anneaux, corps

1. Anneau : définition, anneau commutatif, exemples. Sous-anneau. Calcul dans un anneau : formule du binôme pour deux éléments a et b qui commutent, factorisation de $a^n - b^n$ si a et b commutent.
2. Groupe multiplicatif des éléments inversibles d'un anneau $(\mathrm{A}, +, \times)$, groupe noté $(\mathrm{A}^\times, \times)$ ou $(\mathrm{U}_\mathrm{A}, \times)$. *En exercice : détermination du groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[i]$, de $\mathbb{Z}[j]$, de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.*
3. Anneau intègre. Corps, sous-corps, exemples vus en classe : $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des nombres constructibles à la règle et au compas.
4. Corps, sous-corps. Exemples.
5. Morphisme d'anneaux.

N.B. Nous n'avons pas défini l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Les notions de sous-groupe distingué n'ont pas été évoquées.
Vu en exercice seulement : notion d'idéal d'un anneau commutatif.

QUESTIONS de COURS ou EXOS :

1. Détermination des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ (en utilisant le théorème de la division euclidienne (admis à ce stade)).
2. Si $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est un morphisme de groupes, l'image réciproque (respectivement l'image directe) d'un sous-groupe H' de G' (resp. d'un sous-groupe H de G) par f est un sous-groupe de G (resp. de G'). Application : structure de $\ker f$ et Im f
3. Si $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est un morphisme de groupes, alors f est injective si et seulement si $\ker f = \{e_{\mathrm{G}}\}$
4. Vérifier que les applications suivantes sont des morphismes de groupes et donner leur image et leur noyau.
   (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $t \mapsto e^{it}$;
   (2) si $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $g_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$;
   (3) $\varphi : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P} \to \mathrm{P}'$;
   (4) $\phi : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P} \to \mathrm{XP}$.
5. Exo : Soit $(\mathrm{G}, \star)$ un groupe et $x \in \mathrm{G}$ fixé. On considère $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathrm{G} \\ k & \mapsto & x^k \end{array} \right.$
   (1) Vérifier que φ est un morphisme de groupes. En déduire que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-groupe de G, dit sous-groupe engendré par x. On le notera $< x >$.
   (2) Montrer que le sous-groupe engendré par x est :
   — soit infini et isomorphe à $\mathbb{Z}$;
   — soit fini, de la forme $< x >= \{e, x, x^2, \ldots, x^{a-1}\}$ où a est un entier ≥ 1 tel que
   $$\forall k \in \mathbb{Z},\ (x^k = e \Longleftrightarrow a|k)$$
   et dans ce cas $| < x > | = a$.
   on discutera selon le sous-groupe $\ker \varphi$.
   (3) *Exemples* Dans chacun des cas suivants on indique le groupe G et l'élément x choisi. Décrire le sous-groupe $< x >$ obtenu.
   a. $\mathrm{G} = \mathbb{R}^*$ muni du produit usuel, et $x = 2$.
   b. $\mathrm{G} = \mathbb{C}^*$ muni du produit usuel et $x = e^{i\frac{2\pi}{\mathrm{N}}}$.
   c. G est le groupe des bijections du plan et $x = \mathrm{T}_u$ la translation de vecteur u où u est un vecteur fixé non nul.
   d. G est le groupe des bijections du plan et $x = s_{\mathrm{O}}$ la symétrie centrale de centre O
   e. G est le groupe des bijections du plan et $x = r$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$.
6. Exo : montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un anneau (sous-anneau de $\mathbb{R}$) puis que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

PRÉVISIONS : Arithmétique.

Bonnes vacances à tous et très belles fêtes de fin d'année !