

Programme de colle semaine 14 - 15 janvier

Le cours doit être parfaitement su.

Arithmétique dans \mathbb{Z}

1. Relation de divisibilité et division euclidienne

1. Relation de divisibilité dans \mathbb{Z} . Propriétés élémentaires (réflexivité, transitivité, antisymétrie dans \mathbb{N}). Lien avec les sous-groupes additifs de \mathbb{Z} .
2. Division euclidienne dans \mathbb{Z} . Algorithme de la division euclidienne. Application : sous-groupes de \mathbb{Z} .
3. Relation de congruence. Définition. Opération de somme et de produit. Application aux critères de divisibilité usuels (3,9,11).

2. PGCD, PPCM

1. Définition du pgcd de deux entiers. (pour $(a, b) \neq (0, 0)$ le pgcd de a, b se note $a \wedge b$ et est le plus grand diviseur commun des entiers a et b . Algorithme d'Euclide. Il existe u, v entiers tels que $a \wedge b = au + bv$. Si on note $D(n)$ l'ensemble des diviseurs de n , on a $D(a) \cap D(b) = D(a \wedge b)$. Propriété : $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$. Algorithme d'Euclide étendu.
2. Entiers premiers entre eux. Théorème de Bezout. Théorème de Gauss. Application à la définition du représentant irréductible d'un rationnel.
3. Définition du ppcm. Propriétés élémentaires. $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$. Conséquence : un multiple commun à a et b est un multiple du ppcm.
4. Produit du pgcd et du ppcm de deux entiers.
5. Extension des notions de pgcd et ppcm de n entiers.

EXOS À MAÎTRISER :

- Savoir utiliser des congruences pour répondre à des questions de divisibilité.
- Résolution d'équations diophantiennes du type $ax + by = n$ avec n multiple du pgcd de (a, b)

3. Nombres premiers

Définition. Pte : un nombre premier est premier avec tous les entiers qu'il ne divise pas. Si p premier, et $p|ab$ alors $p|a$ ou $p|b$. Crible d'Eratosthène.

Exo : Si p est un nombre premier alors pour tout entier $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k}$. Petit théorème de Fermat.

Théorèmes.

1. Tout entier naturel $n \geq 2$ admet un diviseur premier.
2. L'ensemble des nombres premiers est infini.
3. Théorème de décomposition en facteur premiers.

p -valuation d'un entier. Utilisation pour caractériser la divisibilité, pour exprimer le pgcd ou le ppcm d'une famille d'entiers.

QUESTIONS ou exos DE COURS :

1. Corollaire du théorème de Gauss : si a et b divisent n et que a et b sont premiers entre eux, alors ab divise n .
Et si $a \wedge m = 1$ et $b \wedge m = 1$ alors $ab \wedge m = 1$.
2. Exo : savoir résoudre une équation diophantienne du type $ax + by = \ell$ où ℓ est un multiple du pgcd de a et b ; les nombres a, b et ℓ seront choisis par le colleur.
3. Écriture des rationnels : si $r \in \mathbb{Q}$, il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$. De plus, pour $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on a $r = \frac{a}{b}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $p = ka$ et $q = kb$.
4. Infinité de l'ensemble des nombres premiers.
5. Exo : Si p est un nombre premier alors pour tout entier $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k}$

N.B. La semaine du 22 janvier au 27 janvier, la classe MPSI2 part travailler à la montagne. Il n'y aura **pas de colle la semaine du 22 au 27 janvier**.

PRÉVISIONS : Espaces vectoriels et Applications linéaires (sans dimension).

Meilleurs vœux à tous les élèves et toute l'équipe des colleurs de MPSI2 pour cette nouvelle année !