Programme de colle de la semaine 16 - semaine du 29 janvier

N.B. Cette semaine marque le début du semestre 2. Le colloscope a changé. Veuillez vous référer au nouveau colloscope qui sera mis à jour sur le site d'ici dimanche 29 janvier.

Algèbre linéaire (sans dimension)

1 - Espaces Vectoriels, sous-espaces vectoriels

Selon le programme MPSI, K désigne un corps qui est soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

1. Espace vectoriel : Définition. Exemples fondamentaux.
   Espace de la géométrie vectorielle classique.
   Structure de K-ev de K^n pour $n \in \mathbb{N}$. Espace vectoriel des polynômes $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$.
   Si F est un K-ev et X un ensemble (non vide), l'ensemble des applications de X dans F admet une structure de K-ev. Espaces de fonctions, de suites.
   Produit cartésien d'espaces vectoriels.
   Si K est un sous-corps de L, tout L-ev admet une structure de K-ev.
2. Sous-espace vectoriel : définition. Exemples : ex de sev de $\mathbb{R}^3$ défini par des équations ; $\mathrm{K}_n[\mathrm{X}]$ sev de $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$; l'ensemble $\mathcal{B}$ des suites bornées, l'ensemble $\mathcal{C}$ des suites convergentes sont des sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$; $\mathcal{C}^0(\mathrm{I})$, $\mathcal{D}^1(\mathrm{I})$ et l'ensemble des fonctions solutions d'une EDL homogène (sur l'intervalle I) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.

   Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs. Définition de $\mathrm{Vect}\ (\mathcal{F})$ sev engendré par une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ de E comme l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.
   Familles génératrices d'un espace vectoriel. Exemples.

2 - Applications linéaires

1. Application linéaire : définition. Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme d'espaces vectoriels. Forme linéaire. Exemples : exemple en géométrie, ex d'applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, la dérivation, homothéties.

   Prop : si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ l'image directe d'un sev E_1 de E par f est un sev de F et l'image réciproque d'un sev F_1 de F par f est un sev de E.
   Définition de l'image et du noyau. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.
2. Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ (sev de $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$). La composée d'applications linéaires est linéaire. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. Cas particulier des endomorphismes d'un ev E : structure d'anneau de $(\mathcal{L}(\mathrm{E}), +, \circ)$.
   Groupe linéaire de E noté $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$: groupe des automorphismes de E.

3 - Sommes, sommes directes, supplémentaires et projecteurs

1. Somme. Définition de la somme de deux sev.
2. Somme directe (définition : la somme $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est directe si la décomposition est unique).
   Caractérisation : $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est directe si et seulement si $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
3. Sous-espaces supplémentaires dans E. Exemples.
4. Somme et somme directe de $n \geq 3$ sev de E. Caractérisation par l'unicité de l'écriture du vecteur nul.
   Exercice du cours : si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$*, alors* $\ker(f)$, $\ker(f - \mathrm{Id})$ *et* $\ker(f - 2\mathrm{Id})$ *sont en somme directe.*
5. Projecteurs. Définition. Image, noyau. Caractérisation par $p \circ p = p$.
6. Symétries. Définition. Sous-espaces propres. Caractérisation par $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.
7. Si $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_p$ une application linéaire de E dans un ev F est entièrement déterminée par ses restrictions aux sev E_i, c'est-à-dire que, pour $i \in [\![1, p]\!]$, si $u_i \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_i, \mathrm{F})$, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ tel que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ $f_{|\mathrm{E}_i} = u_i$.

4 - Formes linéaires et hyperplans

1. Def : Un hyperplan H de E est un sev de E admettant une droite comme supplémentaire.
   Pté : si $\overrightarrow{a} \notin \mathrm{H}$ hyperplan, alors $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}\ (\overrightarrow{a})$.
2. Toute forme linéaire non nulle est surjective.
3. H sev de E est un hyperplan ssi H est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Exemples.
4. Deux formes linéaires non nulles ont même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.

Questions de COURS

1. Savoir démontrer qu'une partie d'un ev est un sev d'un ev de référence. Par exemple :
   (1) $\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ x - 2y + 3z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.
   (2) $\mathrm{F} = \{y \in \mathrm{D}^2(\mathbb{R})\ /y'' + 2x^2y' - 3y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ou de $\mathrm{D}^2(\mathbb{R})$, ev des applications deux fois dérivables.
   (3) $\mathrm{F} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ /\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
2. Définition d'une famille génératrice d'un ev F.
   Savoir déterminer une famille génératrice. Par exemple, donner une famille génératrice de F sev de $\mathbb{R}^4$ défini par : $\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x = y, x + 2z + t = 0\}$ ou du sev F de $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$ défini par $\{\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}], \mathrm{P}(0) = 0\}$
3. Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, alors $\ker f$ est un sev de E et/ou $\mathrm{Im}\, f$ un sev de F.
4. Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ alors $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\ (f(\mathcal{F}))$ *(Démonstration à écrire dans le cas où $\mathcal{F}$ est une famille finie).*
5. Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire par le noyau.
6. Exo : si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, alors $\ker(f)$, $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\ker(f - 2\mathrm{Id})$ sont en somme directe.
7. Si $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ vérifie $p \circ p = p$ alors $\mathrm{E} = \ker(p) \oplus \ker(p - \mathrm{Id})$ et p est la projection de E sur $\ker(p - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker p$.
   Ou bien : Si $\sigma \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ vérifie $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ alors $\mathrm{E} = \ker(\sigma - \mathrm{Id}) \oplus \ker(\sigma + \mathrm{Id})$ et σ est une symétrie vectorielle.
8. Toute forme linéaire non nulle est surjective.
9. Si H est un hyperplan de E et si $a \notin \mathrm{H}$ alors $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}\ (a)$
10. Exo : pour $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$, on a : $(g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}\, f \subset \ker g)$.

PRÉVISIONS : Limites et Continuité des fonctions réelles d'une variable réelle.