Programme de colle - semaine 19 - 4 mars

Le cours doit être parfaitement su.

Algèbre linéaire : la théorie de la dimension finie

1- Familles libres, familles génératrices, bases

1. Familles génératrices (rappel).
2. Familles libres, familles liées. Des exemples : dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les familles de polynômes de degré échelonnés sont libres dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Bases. Coordonnées d'un vecteur dans une base.
4. Famille génératrice d'une somme de sev, famille libre d'une somme directe, base d'une somme directe par concaténation de bases, caractérisation d'une somme directe.

2 - Théorie de la dimension

1. Théorème de la base incomplète. Conséquence : en dimension finie ($\mathrm{E} \neq \{0\}$), existence d'une base finie.
2. Dimension d'un ev. Exemples : K^n, $\mathrm{K}_n[\mathrm{X}]$, bases canoniques de ces espaces vectoriels, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.
   Si $\dim \mathrm{E} = n$, les familles libres de E ont au plus n vecteurs et les familles génératrices de E ont au moins n vecteurs.
   Caractérisation des bases en dimension finie : si E de dimension n, toute famille libre (respectivement génératrice) de E ayant n vecteurs est une base de E.
3. Dimension de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$
4. Si E de dim finie, un sev F est de dimension avec $\dim \mathrm{F} \leq \dim \mathrm{E}$. De plus si $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{E}$, alors $\mathrm{F} = \mathrm{E}$.
   Dimension d'une somme $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ (formule de Grassmann) (preuve géométrique par construction d'une base.)
   Caractérisation des supplémentaires en dimension finie.
   Propriété : Si $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_n$ sont n sev de E, tous de dimension finie, $\dim(\sum \mathrm{F}_i) \leq \sum \dim \mathrm{F}_i$ avec égalité si et seulement si $\sum \mathrm{F}_i = \oplus \mathrm{F}_i$
   Existence de supplémentaires en dimension finie.

3 - Dimension finie et applications linéaires

Dans ce paragraphe, $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et E et/ou F sont de dimensions finies (selon les cas).

1. L'image d'une famille libre de E par une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ injective est une famille libre dans F. Détermination de $\mathrm{Im} f$ à partir d'une famille génératrice de E. Caractérisation des isomorphisme par l'image d'une base.
2. Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs de $f(\mathcal{B})$ si $\mathcal{B}$ est une base de E.
3. Dimension de $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$
4. si E de dim finie , E est isomorphe à F ssi F est de dimension finie égale à celle de E. Isomorphisme entre un ev de dimension n et K^n si une base de E est fixée.
5. Théorème du rang : Si E est un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.
   1) La restriction de f à un supplémentaire G du noyau réalise un isomorphisme de G sur Im f
   2) $\dim \mathrm{E} = \dim \ker f + rg f$
6. Injectivité. Caractérisation par $\mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{E}$ ou $\dim \ker f = 0$
7. Surjectivité : caractérisation avec $\mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{F}$
   Comparaison des dimensions de E et F si f injective, surjective ou bijective.

8. Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.
   Théorème : si $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$ (finie), une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est injective ssi elle est bijective ssi elle est surjective.
   En particulier : pour un endomorphisme en dimension finie : injectivité équivaut à surjectivité.
   Exercice : si E et F sont deux ev de même dimension finie, si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ vérifient $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ alors f est un isomorphisme de réciproque g.
9. Hyperplans et formes linéaires en dimension finie. Un hyperplan est un sev de E de dimension $\dim \mathrm{E} - 1$.
   Équation cartésienne d'un hyperplan relativement à une base.

N.B. nous n'avons pas encore abordé les calculs effectifs de rangs (avec les matrices). Pas de questions sur ces notions cette semaine.

QUESTIONS DE COURS : Tout énoncé d'un résultat du cours sur la dimension finie. Pour les démos :

1. Liberté dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles de la famille des vecteurs (u, v, w) où $u = (1)_n$, $v = (2^n)_n$ et $w = (n)_n$.
   Liberté dans le $\mathbb{C}$-ev des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de la famille $(f_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ si $f_i : t \mapsto t^i e^t$.
   Justifier que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de dimension infinie.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ des scalaires deux à deux distincts. Montrer que les sous-espaces $(\ker(f - \lambda_i \mathrm{id}))_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont en somme directe.
   En déduire que si $\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}$ sont des vecteurs non nuls tels que $f(\overrightarrow{x_i}) = \lambda_i \overrightarrow{x_i}$, la famille $(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ est libre dans E.
3. *Exercice :* Soit E un K-ev de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme nilpotent de E c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$. On note r le plus petit entier naturel qui vérifie $f^r = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.
   (a) Justifier qu'il existe x_0 dans E tel que $f^{r-1}(x_0) \neq 0_{\mathrm{E}}$ la famille $\mathcal{B}_0 = (x_0, f(x_0), \cdots, f^{r-1}(x_0))$ est libre dans E.
   (b) En déduire que $r \leq n$ puis que $f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.
   Si f est injective, l'image d'une famille libre de E par f est une famille libre de F.
   Si $\mathcal{B}$ est une base de E, f est un isomorphisme si et seulement si $f(\mathcal{B})$ une base de F.
   NB : on se contentera de demander les preuves quand les familles de vecteurs (génératrices, libres ou bases) sont finies.
5. Si F et G sont deux sev de dimension finie d'un ev E, dimension de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ (démo par construction d'une base)
6. Théorème du rang.
7. Équivalence entre injectivité, bijectivité et surjectivité pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F de même dimension finie *(explications au choix de l'élève : soit à partir du théorème du rang, soit à partir des connaissances sur l'image d'une base par une application linéaire injective, ou surjective ou bijective.)*
   + *Exercice* : si E et F sont deux ev de même dimension finie, si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ vérifient $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ alors f est un isomorphisme de réciproque g.

PRÉVISIONS : **calculs de rangs (pivot de Gauss sur la matrice d'une famille de vecteurs), équation d'un hyperplan. Puis chapitre Dérivation**