Programme de colle semaine n° 20 - semaine du 11 mars

Le cours doit être parfaitement su.

Dimension finie

Tout exercice sur le chapitre (en particulier théorème du rang et conséquences. Voir programme précédent). Vu cette semaine :

1. Hyperplans et formes linéaires en dimension finie. Équation cartésienne d'un hyperplan relativement à une base.
2. Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire. Invariance par composition avec un isomorphisme.
3. Matrice d'une famille de p vecteurs $\mathcal{F}$, relativement à une base $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$. Le rang de $\mathcal{F}$ est égal au rang des p vecteurs colonnes de $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
4. Le rang d'une matrice échelonnée par colonnes est égal au nombre de colonnes non nulles.
5. Opérations élémentaires sur les colonnes préservant le rang. *On a admis que les opérations élémentaires pouvaient aussi s'effectuer sur les lignes, on le démontrera dans le cours sur les matrices.*
6. Algorithme du pivot de Gauss pour le calcul du rang.

Dérivation d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

1 - Dérivabilité

1. Dérivabilité en un point. Équivalence avec l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.
2. Opérations classiques : dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, de l'inverse, d'une composée. Idem pour la dérivée n-ième, et formule de Leibniz pour la dérivée n ième d'un produit.
3. Dérivabilité d'une fonction réciproque. Critère de $\mathcal{C}^n$ difféomorphisme pour une bijection entre deux intervalles réels.

2 - Théorèmes de Rolle, des accroissements finis

1. Si f dérivable sur un intervalle I admet un extremum local en x_0 un point intérieur à I, alors $f'(x_0) = 0$.
2. Théorème de Rolle (pour f réelle). Égalité des accroissements finis pour les fonctions réelles. CEX pour f à valeurs complexes
   Inégalité des accroissements finis (pour f réelle ou complexe). *Résultat admis provisoirement concernant les fonctions complexes, la démo sera faite dans le chapitre intégration).*

   Remarque : si f est continue sur $[a, b]$ à dérivée bornée sur $]a, b[$ (en particulier si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$), alors f est $k-$lipschitzienne sur $[a, b]$ (avec $k = \sup\limits_{t\in]a,b[} |f'(t)|$).

   Applications du théorème des accroissements finis :

   — pour f réelle : lien entre monotonie et signe de la dérivée sur un intervalle.

   — sur des exemples : étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, utilisation du TAF et approximation de a point fixe de f. (Exemple traité $u_{n+1} = e^{-1/2u_n^2}$)

   — Théorème sur la limite d'une dérivée : *soit* I *un intervalle réel contenant* x_0 *et* f *fonction, réelle ou complexe, dérivable sur* $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$, *continue en* x_0 *telle que :* $f'(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$ *avec* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ *ou* $\ell \in \mathbb{C}$. *Alors si* ℓ *est fini,* f *est dérivable en* x_0 *et* $f'(x_0) = \ell$, *si* $\ell = \pm\infty$, f *n'est pas dérivable en* x_0.

   N.B. Le chapitre n'est pas fini. Seront vus la semaine prochaine : inégalité de Taylor-Lagrange, Convexité. Merci de ne pas interroger sur ces notions dès cette semaine (ni sur des suites récurrentes, sauf si fonction contractante).

QUESTIONS DE COURS :

1. si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ avec E et F ev de dimensions finies, si $\varphi : \mathrm{E}' \to \mathrm{E}$ et $\phi : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ sont des isomorphismes, on a $\mathrm{rg}\,(f \circ \varphi) = \mathrm{rg}\,(f)$ et $\mathrm{rg}\,(\phi \circ f) = \mathrm{rg}\,(f)$
2. Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$, on note $u_1 = (1,2,2,3), u_2 = (2,0,1,2)$ deux vecteurs de E et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$. Déterminer la dimension de F et déterminer les équations de F (dans la base canonique).
3. Pour $f(x) = x^3 \sin(x)$, expression de la dérivée n-ième de f.
   Et/ou Pour $g(x) = x^{n-1} \ln x$, expression de la dérivée n ième de g.
4. Si I est un intervalle et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0 admettant un maximum local en x_0 avec x_0 à l'intérieur de I, alors $f'(x_0) = 0$ (démo).
5. Théorème de Rolle : énoncé et démo ;
6. *Exercice* : Montrer que si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est un polynôme scindé, alors P' est également scindé.
7. *Exercice* : $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$. On a tracé son graphe et démontré que f admet un unique point fixe a dans $\mathbb{R}$, avec $a \in [0,1]$. Questions de cours :
   (a) Montrer que f est contractante (k-lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$).
   (b) En déduire que la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente vers a.
8. À l'aide du théorème des accroissements finis,
   (a) Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}, |e^u - 1| \leq |u| e^{|u|}$
   (b) Majorer l'erreur commise en prenant 100 comme valeur approchée de $\sqrt{10001}$.
9. *Exercice (utilise le résultat sur la limite d'une dérivée)* : étude de la dérivabilité de $f(x) = \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$ (domaine de définition, étude de la dérivabilité)
10. *Exercice :* soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = e^{-1/x^2}$.
    (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que
    $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$$
    (b) Montrer que f admet un prolongement en 0 qui définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

PRÉVISIONS : Fin du chapitre Dérivation (Inégalité de Taylor-Lagrange, inégalités de convexité). Matrices ou étude pratique des suites récurrentes