Programme de colle semaine n° 21 - semaine du 18 mars

Le cours doit être parfaitement su.

Dérivation d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

Pour une fonction à valeurs réelles : **Théorèmes de Rolle, égalité des accroissements finis**.

Pour une fonction à valeurs réelles ou complexes : **inégalité des accroissements finis, inégalité de Taylor-Lagrange** (admis à ce stade de l'année).

Fonctions réelles convexes sur un intervalle de $\mathbb{R}$: définition puis interprétation géométrique : la courbe de f est située en dessous de ses cordes. Inégalité de Jensen.

Croissance des pentes des cordes dont une extrémité est fixée. Inégalité des trois cordes.

Convexité et dérivabilité : si f est convexe et dérivable en x_0, la courbe de f est située au-dessus de sa tangente en x_0. Pour une fonction f dérivable, f est convexe ssi f' est croissante. Pour f deux fois dérivable, f est convexe ssi f'' est positive.

Points d'inflexion.

Inégalités classiques de convexité.

2- Étude pratique de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Représentation graphique : courbe de f, droite $y = x$. Détermination d'un intervalle stable par f contenant u_0 (et donc tous les termes de la suite) et sur lequel les propriétés utiles (position relative par rapport à $y = x$ ou monotonie de f ou caractère contractant) sont vérifiées.

Résultats vus en cours :

1. Définition de la suite : recherche d'une partie I $\subset \mathcal{D}_f$ stable par f contenant u_0.
2. Si u converge vers ℓ et f continue en ℓ, lien entre points fixes de f et limite de u.
3. Cas où $x \mapsto f(x) - x$ est de signe constant sur un intervalle stable par f et contenant u_0.
4. Cas où f est contractante ((k-lipschitzienne avec $k \in [0, 1[$)) sur un intervalle I stable par f et contenant u_0 et un point fixe ℓ.
5. Cas où f est croissante sur un intervalle I contenant tous les u_n : u est monotone, le sens de monotonie se détermine par la comparaison de u_0 et u_1.
6. Cas où f est décroissante sur un intervalle contenant tous les u_n : monotonie des suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Quelques cas particulier

suites arithmétiques, géométriques, **arithmético-géométriques** et **suites récurrentes linéaires d'ordre 2** (réelles ou complexes) *(c'est tout pour la 1ère année).*

N.B. La méthode de Newton, les notions de vitesse de convergence quadratique font l'objet d'un TD. Les notions de points fixes attractifs $|f'(\ell)| < 1$ ou répulsifs $|f'(\ell)| > 1$) sont vus en exercice, mais ne sont pas des résultats de référence de cours.

QUESTIONS DE COURS :

1. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange puis prouver l'une des 3 inégalités choisies par le colleur :
   - $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.
   - $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!}$ (avec $f(t) = e^{tz}$ définie sur $[0,1]$)
   - pour $x \in [0,1]$, $\ln(1+x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$.
2. Inégalité de convexité. Justifier les inégalités suivantes :
   (a) $\forall x \in [0, \pi/2], \dfrac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$
   (b) $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.
   (c) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \arctan(x) + \arctan(y) \leq 2\arctan\left(\frac{x+y}{2}\right)$
3. *Exercice* Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et g une fonction convexe et croissante sur $\mathbb{R}$, montrer que $g \circ f$ est convexe.

   Dans les questions suivantes, I *désigne un intervalle réel,* f *définie sur* I *à valeurs dans* I *et* u *une suite récurrente définie par* $u_0 \in \mathrm{I}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
4. Justifier que si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ et $u_0 \in \mathrm{I}$ et si f est croissante sur I, alors u est monotone. *À traiter en exemple :* $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ *avec* $u_0 \geq -1$*, convergence de* u*.*
5. Justifier que si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ et si f est contractante sur I, si f possède un point fixe dans I, alors celui-ci est unique et que pour tout $u_0 \in \mathrm{I}$, la suite récurrente $(u_{n+1} = f(u_n))$ est bien définie et converge vers le point fixe de f dans I.
   À traiter en exemple : $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ *et* $u_0 = 2$
6. Résolution d'une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$ sur un exemple choisi par le colleur. Vu en cours $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + 1, u_0 = 1$
7. Déterminer dans chaque cas les suites réelles vérifiant :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$ avec $\mathrm{F}_0 = 0, \mathrm{F}_1 = 1$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0$,
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 3n + 3$
8. *Exercice (on donnera l'énoncé à l'élève)* Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\ell \in \mathrm{I}$ un point fixe de f.
   (a) On suppose $|f'(\ell)| < 1$.
   Montrer qu'il existe un intervalle de la forme $\mathrm{J} = [\ell - \eta, \ell + \eta]$ avec $\eta > 0$ tel que $\mathrm{J} \cap \mathrm{I}$ est stable par f et pour lequel si $u_0 \in \mathrm{J} \cap \mathrm{I}$ la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ.
   Si en plus $f'(\ell) = 0$, et f de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, justifier $(u_{n+1} - \ell) = \mathrm{O}(u_n - \ell)^2$ (cv quadratique)
   (b) Si $|f'(\ell)| > 1$, démontrer que la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ est soit stationnaire à ℓ, soit elle ne converge pas vers ℓ.

PRÉVISIONS : **Matrices**