LMB	*MPSI2*
Programme semaine 22 - semaine du 25 mars	

Le cours doit être parfaitement su.

Matrices

A - Matrices : structure

1. Définition. Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathrm{K})$, dimension. Base : matrices élémentaires
2. Transposition. Matrices symétriques et antisymétriques.
3. Produit matriciel. Propriétés. Structure d'anneau pour $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ (non commutatif, ayant des diviseurs de zéro). Sous-anneau des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieures.
4. Trace d'une matrice carrée et propriété $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA})$ pour $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$.
5. Puissances et inverse éventuel d'une matrice carrée. Inverse d'un produit de matrice carrées inversibles. Groupe linéaire d'ordre n.

B - Matrices, applications linéaires (sans changements de bases cette semaine)

1. Matrice d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ relativement à deux bases $\mathcal{B}_\mathrm{E}$ et $\mathcal{B}_\mathrm{F}$ de E et de F.
   Si E et F sont des K-ev de dim n et p, isomorphisme d'ev entre $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathrm{K})$ (des bases de E et F étant fixées).
2. Écriture de $y = u(x)$ sous forme matricielle : $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$ si $\mathrm{A} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_\mathrm{E}, \mathcal{B}_\mathrm{F}}(u)$, X matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}_\mathrm{E}$ et Y matrice colonne des coordonnées de y dans $\mathcal{B}_\mathrm{F}$.
   Matrice d'une composée d'applications linéaires.
   Lien entre matrice inversible et isomorphisme.
   Utilisation d'une matrice pour trouver noyau et image d'une application linéaire.
3. Égalité du rang d'une famille de vecteurs et du rang de sa matrice dans une base. Égalité du rang d'une application linéaire et de sa matrice. Caractérisation des matrices inversibles par le rang ou par $\forall \mathrm{X}$ colonne, $(\mathrm{AX} = 0 \implies \mathrm{X} = 0)$
   Inversibilité des matrices diagonales, des matrices triangulaires.

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

1. Propriété de la trace $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA})$
2. Les ensembles $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ des matrices symétriques et anti symétriques sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ supplémentaires. Préciser une base et la dimension de $\mathcal{S}_n$.
3. Si f est un projecteur de E (avec $\dim \mathrm{E} = n$), il existe une base de E dans laquelle $\mathcal{M}_\mathcal{B}(f) = \mathrm{Diag}(1, \cdots, 1, 0, \cdots 0)$.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, $x \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{A} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_\mathrm{E}, \mathcal{B}_\mathrm{F}}(u)$ où $\mathcal{B}_\mathrm{E}$ et $\mathcal{B}_\mathrm{F}$ sont des bases de E et de F. Démontrer que les coordonnées du vecteur $u(x)$ dans la base $\mathcal{B}_\mathrm{F}$ sont données par la colonne AX où $\mathrm{X} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_\mathrm{E}}(x)$.
5. Expliquer les caractérisations suivantes des matrices inversibles parmi les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$:
   - matrice d'un isomorphisme,
   - ou matrice de rang n
   - ou matrice A vérifiant $\forall \mathrm{X}$ vecteur colonne, $(\mathrm{AX} = 0 \implies \mathrm{X} = 0)$
   - ou s'il existe $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ tel que $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$
   - ou s'il existe $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ tel que $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$
6. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathrm{K})$ de rang r. On appelle φ l'application linéaire canoniquement associée à A.
   Expliquer ce que cela veut dire.
   CNS sur r pour que φ soit injective, CNS sur r pour que φ soit surjective.
7. *Exo* : on note pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Justifier que $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{R}(\theta + \theta') = \mathrm{R}(\theta)\mathrm{R}(\theta')$. Justifier que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{R}(\theta)$ est inversible et donner $\mathrm{R}(\theta)^{-1}$; préciser $\mathrm{R}(\theta)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
8. Si $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathrm{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathrm{K})$, $\mathrm{rg}\,(\mathrm{AB}) \leq \min\{\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}), \mathrm{rg}\,(\mathrm{B})\}$

PRÉVISIONS : Changements de bases, matrices équivalentes, semblables. Système linéaires.