LMB *MPSI2*

Programme de colle semaine n°23 - 22 avril

Le cours doit être parfaitement su.

Exercices sur les développements limités

en prévision du cours "Séries", révision des DL. Vous pouvez poser n'importe quel exercice sur le sujet. Cela peut être juste un calcul d'équivalent, ou un calcul de limite.

- Ensembles finis et dénombrement

Si E est un ensemble fini, on note $|\mathrm{E}|$ ou $\mathrm{Card}(\mathrm{E})$ le nombre d'éléments de E.

1) Résultats sur les applications entre ensembles finis

si E est un ensemble fini et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ alors $f(\mathrm{E})$ est fini et $|f(\mathrm{E})| \leq |\mathrm{E}|$ avec égalité ssi f est injective. Conséquences : si f est injective alors $|\mathrm{E}| \leq |\mathrm{F}|$; si f est surjective, $|\mathrm{E}| \leq |\mathrm{F}|$; si f est bijective alors $|\mathrm{E}| = |\mathrm{F}|$.

Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ avec E et F finis et de même cardinal, on a les équivalences : f injective $\Longleftrightarrow$ f bijective $\Longleftrightarrow$ f surjective.

2) Quelques notions sur les ensembles infinis dénombrables

notions évoquées en classe mais hors-programme, donc pas d'exercices sur ce sujet.

3) Principes élémentaires de dénombrement

Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis.
Cardinal de la réunion de deux ensembles finis (disjoints ou non).
Principe des bergers.
Principe des tiroirs.
Méthodes : représentation par un arbre de sélection, par un "identifiant", construction d'une bijection avec un ensemble de cardinal connu, décomposition de l'ensemble en une partition d'ensembles dont les cardinaux sont connus, ou utilisation du principe des bergers.

4) Des résultats de dénombrement

a) Nombre d'applications entre deux ensembles finis.
b) Nombre de parties d'un ensemble à n éléments.
c) Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.
d) Soit E un ensemble fini de cardinal n. Définition d'une p-liste (ou p-uplet) d'éléments deux à deux distincts de E (p-arrangement d'éléments de E). Nombre de p-uplets d'éléments distincts de E.
Nombre d'applications injectives entre deux ensembles finis.
e) Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{p}$.
Expression de $\binom{n}{p}$ (démonstration combinatoire). Propriétés des coefficients du binôme : symétrie, relation de Pascal et formule du binôme (démonstration combinatoire des propriétés).

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours : Pour tous au moins un D.L d'une fonction usuelle à écrire (par coeur) sans démonstration.

1. Un des résultats du cours Dénombrement paragraphe 4) a), b), c) (énoncé et démonstration).
2. Nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments (démo combinatoire).
3. Exo (formule de Van DerMonde) pour $n, p \in \mathbb{N}$, démontrer $\binom{n+m}{p} = \sum_{i+j=p} \binom{n}{i}\binom{m}{j}$
4. Exo : On considère une urne remplie de N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages successifs avec remise. La suite des numéros obtenus constitue le résultat.
   (1) Combien y a t-il de résultats possibles ?
   (2) Combien existe-t-il de résultats différents pour lesquels la boule numéro 1 est prélevée k fois exactement ? $(k \leq n)$
   (3) Combien existe-t-il de résultats différents pour lesquels la boule numéro 1 est prélevée k fois au cours des p premiers tirages ? (la boule numéro 1 pouvant être prélevée après le tirage $n°p$) $(k \leq p \leq n)$
   (4) Combien existe-t-il de résultats différents pour lesquels la boule numéro 1 est prélevée pour la k ième fois au p ième tirage ? $(k \leq p \leq n)$
5. Révision : (sans démonstration) DL d'une des fonctions usuelles (plusieurs choisis par le colleur). *Un D.L. non connu entraînera une note* ≤ 10.
6. Révision : Énoncé (sans démonstration) de l'inégalité de Taylor-Lagrange pour f de classe $\mathcal{C}^n$.

Bonnes vacances à tous !

PRÉVISIONS : séries numériques ou Proba (sans variable aléatoire).

Pas de colle la semaine de l'Ascension. Rappel, les colles du mercredi 1er mai devront être déplacées.