

Programme de colle semaine n°25 - semaine du 29 avril

Le cours doit être parfaitement su.

Révision - DL

Tout exercice sur le sujet, y compris des calculs de limites

Séries à termes réels ou complexes

La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$ et en cas de convergence sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Somme partielle. Le terme général u_n d'une série convergente tend vers 0. Critère de divergence grossière. Le reste d'ordre n d'une série convergente tend vers 0. Opérations sur les séries.

Les séries de référence :

- les séries géométriques $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et valeur de la somme ;
- série exponentielle $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$. Application : développement en série de $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{sh}(x)$, $\cos(x)$ et $\sin(x)$ pour tout x réel.
- Séries de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Encadrement des sommes partielles et équivalent de S_n dans les cas de divergence. Encadrement des restes et équivalent de R_n quand la série converge.

Séries à termes positifs : Théorème de comparaison si à partir d'un certain rang, on a $0 \leq u_n \leq v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique la convergence de $\sum u_n$ et la divergence de $\sum u_n$ implique la divergence de $\sum v_n$.
Corollaire : si $u_n \sim v_n$, avec $(v_n)_n$ de signe constant, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Pas de résultat sur les sommations des relations de comparaison en 1ère année

Révision : Comparaison série/intégrale

(Le critère de D'Alembert a été vu).

Critère des séries alternées et majoration des restes.

Convergence absolue. Toute série absolument convergente est convergente et dans ce cas : $|\sum_{k=n}^{\infty} u_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |u_k|$.

Si $a_n \geq 0$ et $u_n = O(a_n)$ alors la convergence de $\sum a_n$ implique la convergence absolue de $\sum u_n$

Exemples : si $|q| < 1$, la série $\sum n^\alpha q^n$ converge absolument ($n^\alpha q^n = o(\frac{1}{n^2})$); la série $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ converge ($\frac{\ln n}{n^2} = o(\frac{1}{n^{3/2}})$)

Étude d'une suite : la suite u a même nature que la série $\sum (u_n - u_{n-1})$. Exemples : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ et équivalent de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Les élèves doivent connaître l'équivalent.

N.B. Je n'ai pas encore traité les fractions rationnelles; les élèves ne sauront pas décomposer en éléments simples sans indication. Un exercice du type : "Nature de $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ puis calcul de la somme en cas de convergence" doit, à ce stade de l'année, mentionner la forme de la DES pour le calcul de la somme.

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

1. Le terme général d'une série convergente tend vers 0 et le reste d'une série convergente tend vers 0.
2. Nature des séries géométriques et expression de la somme en cas de convergence.
3. Théorème de comparaison pour les séries à termes positifs. Énoncé et démonstration. (Version inégalité ou version équivalent)
4. Critère des séries alternées. Énoncé et démonstration, avec majoration des restes.
5. Montrer que pour $\alpha \in]0, 1]$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et équivalent de la somme partielle.
6. Montrer que si $\alpha > 1$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge et équivalent du reste.
7. Nature des séries suivantes : $\sum \frac{n}{2^n}$, $\sum \frac{\ln n}{n^2}$, $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$ et $\sum \frac{1}{n \ln n}$ (celle-ci se traite par monotonie intégrale),
 $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$
8. La suite $(u_n)_n$ est de même nature que la série $\sum (u_n - u_{n-1})$.
Application : la suite $u_n = H_n - \ln n$ est convergente, on écrira $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Pensez à décaler vos colles du mercredi 1er mai. Mes colles sont décalées à vendredi 3 mai de 15h à 17h salle 224 à 15h, salle 215 à 16h)

PRÉVISIONS : Pas de colle la semaine du 6 mai. Reprise des colle la semaine du 13 mai : Probabilités sur un univers fini.