Programme de colle - semaine 27 (13 mai)

Le cours doit être parfaitement su.

Probabilités sur un univers fini

En MPSI le programme se limite aux expériences aléatoires pour lequel l'univers est fini. Le cours a été traité dans ce cadre mais vous pouvez poser des exercices avec un univers infini, sans soulever de difficulté, en admettant l'existence d'un espace probabilisé et à condition que l'exercice n'utilise que les propriétés d'une probabilité vues en 1ère année (pas de σ-additivité en MPSI, ni de limite monotone.)

1) Univers et événements.
Langage des probabilités : Événement, événement élémentaire (singleton), événement contraire, conjonction ou disjonction d'événements, événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.

2) Probabilités sur un univers fini
Une probabilité sur Ω (fini) est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ tel que $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ et pour toutes parties A et B disjointes, $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B})$. Détermination d'une probabilité par les images des singletons. Exemple : équiprobabilité sur Ω.
Propriétés : probabilité de l'événement contraire, probabilité d'une réunion de 2 événements (la formule du crible pour une union de $n \geq 3$ événements a été écrite mais n'est pas au programme), propriété de croissance.

3) Probabilités conditionnelles.
Définition : si $\mathrm{P}(\mathrm{B}) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est notée $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ ou $\mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ et définie par $\mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$. *Par convention, si* $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0$
L'application P_{B} est une probabilité sur Ω.
Formule des probabilités composées. *Représentation avec arbre de probabilité, comme au lycée possible et à valoriser mais, dans un exercice, on exigera l'écriture de la formule.*
Formule des probabilités totales (associée à un système complet d'événements $(\mathrm{A}_i)_{i=1..n}$:
$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_i)\mathrm{P}(\mathrm{A}_i)$ (représentations : partition de Ω où on fait figurer la partie B de Ω ou arbre de probabilité). *On exigera l'expression explicite de la formule avec nom des événements formant le système complet d'événements (même si la représentation par des parties ou par un arbre est à valoriser).*
Formule de Bayes.

4) Événements indépendants. Couple d'événements indépendants. Famille d'événements mutuellement indépendants. Exemple d'événements deux à deux indépendants mais non mutuellement indépendants.

Variables aléatoires définies sur un univers fini (le tout début)

1) Loi

Définition d'une V.A. Notation pour les événements associés à une VA : $(\mathrm{X} \in \mathrm{A})$, $(\mathrm{X} = a)$, $(\mathrm{X} \leq a)$ etc
Loi. Exemples : loi uniforme sur un ensemble fini, loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ (et notation $1_{\mathrm{A}} \sim \mathcal{B}(\mathrm{P}(\mathrm{A}))$), loi binomiale (situation : si X compte le nombre de succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes où chaque succès arrive avec probabilité p alors $\mathrm{X} \sim \mathcal{B}(n,p)$).
Loi d'une fonction d'une variable aléatoire $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X})$
Indépendance de variables aléatoires.

N.B. Cours non fini : l'espérance, la variance n'ont pas encore été vues, ni les résultats sur les lois usuelles

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé (fini) et B un événement tel que $\mathrm{P}(\mathrm{B}) > 0$. Montrer que l'application P_B appelée, probabilité conditionnelle sachant B, est une probabilité sur Ω.
2. Formule des probabilités composées (énoncé et démo).
3. Formule des probabilités totales (énoncé et démo).
4. *Exercice.* Un pion évolue sur 3 cases A, B, C entre les instants 0 et $\mathrm{N} \geq 3$. À l'instant $t = 0$, il est en A. Puis, il se déplace de façon aléatoire sur les cases en respectant les règles suivantes (pour $n \in [\![0, \mathrm{N}-1]\!]$) :

   — s'il est en A ou B au temps $t = n$, il va au temps $t = n+1$ sur l'une des deux autres cases avec équiprobabilité.

   — s'il est en C au temps $t = n$, il y reste.

   On note (pour $n \in [\![0, \mathrm{N}]\!]$) A_n (resp. B_n et C_n) l'événement "À l'instant $t = n$, le pion est sur la case A (resp. sur les cases B et C)". On pose enfin $a_n = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$, $b_n = \mathrm{P}(\mathrm{B}_n)$ et $c_n = \mathrm{P}(\mathrm{C}_n)$.
   a) Trouver une relation de récurrence entre a_n, b_n, c_n et a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}.
   b) Calculer c_N puis trouver $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} c_\mathrm{N}$.
5. *Exercice.* On choisit au hasard un des nombres entiers $1, 2, \ldots, n$ tous les choix étant équiprobables. Soit p un entier naturel non nul et $\leq n$. Soit A_p l'événement «le nombre choisi est divisible par p»

   (1) Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{A}_p)$ lorsque p divise n.

   (2) Montrer que si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des diviseurs premiers de n distincts, les événements $\mathrm{A}_{p_1}, \mathrm{A}_{p_2}, \ldots, \mathrm{A}_{p_k}$ sont indépendants.

   (3) On appelle fonction indicatrice d'Euler la fonction ϕ définie sur $\mathbb{N}$ dont la valeur $\phi(n)$ est égale au nombre d'entiers de $[\![1, n]\!]$ premiers avec n. Montrer que

   $$\phi(n) = n \prod_{p \text{ premier }, p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$
6. *Exo* : on effectue n tirages successifs avec remise dans un sac contenant N jetons numérotés de 1 à N. On note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit numéro obtenu. Déterminer les lois de X et de Y.

PRÉVISIONS : (ordre non garanti)

— Proba (2) : Variables aléatoires
— Espaces euclidiens
— Déterminant
— Intégration
— Fraction rationnelles et décomposition en éléments simples
— Fonctions de plusieurs variables
— Familles sommables