LMB *MPSI2*

Programme de colle semaine 28 - semaine du 22 mai

Le cours doit être parfaitement su.

Variables aléatoires définies sur un univers fini

1) Loi

Définition d'une V.A. Notation pour les événements associés à une VA : $(\mathrm{X} \in \mathrm{A})$, $(\mathrm{X} = a)$, $(\mathrm{X} \leq a)$ etc
Loi. Exemples : loi uniforme sur un ensemble fini, loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ (et notation $1_{\mathrm{A}} \sim \mathcal{B}(\mathrm{P}(\mathrm{A}))$), loi binomiale (situation : si X compte le nombre de succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes où chaque succès arrive avec probabilité p alors $\mathrm{X} \sim \mathcal{B}(n, p)$).
Loi d'une fonction d'une variable aléatoire $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X})$
Vocabulaire sur les couples de V.A. (lois marginales, loi conditionnelles)

2) Indépendance

Indépendance de 2 variables aléatoires, notation $\mathrm{X} \perp\!\!\!\perp \mathrm{Y}$. Indépendance mutuelle d'une famille de n variables aléatoires. Lemme des coalitions.
Théorème de stabilité des lois binomiales : si $\mathrm{X} \sim \mathcal{B}(n_1, p)$, $\mathrm{Y} \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ et si $\mathrm{X} \perp\!\!\!\perp \mathrm{Y}$ alors $\mathrm{X} + \mathrm{Y} \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.
Application : loi de $\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ si $(\mathrm{X}_i)_i$ famille de VA indépendantes, suivant toutes la loi $\mathcal{B}(p)$.

3) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe.

1) Définition, interprétation. Exemples de calcul d'espérance (lois usuelles en particulier).
2) Théorème de transfert : $\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{X}))$ (X pouvant être un couple ou un uplet de VA réelles ou complexes).
3) Propriétés de l'espérance :
   — Linéarité de l'espérance
   — si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{E}(\mathrm{XY}) = \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})$. Corollaire : si (X_i) famille mutuellement indépendante, alors $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1 \cdots \mathrm{X}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) \cdots \mathrm{E}(\mathrm{X}_n)$.
4) Inégalités sur l'espérance pour les VAR :
   (a) si X VA à valeur positive $\mathrm{E}(\mathrm{X}) \geq 0$ avec égalité ssi $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = 1$,
   conséquences : (croissance) $\mathrm{X} \leq \mathrm{Y} \implies \mathrm{E}(\mathrm{X}) \leq \mathrm{E}(\mathrm{Y})$, si $\mathrm{X}(\Omega) \subset [a, b]$, $a \leq \mathrm{E}(\mathrm{X}) \leq b$.
   (b) (inégalité triangulaire) $|\mathrm{E}(\mathrm{X})| \leq \mathrm{E}(|\mathrm{X}|)$.
   (c) (inégalité de Cauchy-Schwarz) $|\mathrm{E}(\mathrm{XY})| \leq \sqrt{\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)}\sqrt{\mathrm{E}(\mathrm{Y}^2)}$. *(démo faite cette fois avec les sommes finies, car j'avais admis l'inégalité Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ en cours d'année, on verra la démo dans le cadre du bilinéaire (prochain chapitre).*
   (d) Inégalité de Markov : si X V.A. positive $\forall a > 0$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq a) \leq \dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{X})}{a}$

4) Variance d'une variable aléatoire réelle

1) Définition : variance, écart-type, interprétation.
   Relation : $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - (\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2$, variances des lois usuelles.
2) Propriétés : variance nulle ssi loi certaine, $\mathrm{V}(a\mathrm{X} + b)$. Vocabulaire : variable centrée, réduite.
3) Variance d'une somme de 2 V.A.R, covariance.
   Variance d'une somme de n V.A.R.
   Propriété : La covariance est une forme bilinéaire symétrique et positive : $\mathrm{cov}(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = \mathrm{V}(\mathrm{X}) \geq 0$
   Pté : si X et Y sont indépendantes, $\mathrm{cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$. Vocabulaire X, Y VA décorrélées lorsque $\mathrm{cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$.
   Inégalité (Cauchy-Schwarz) $|\mathrm{cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})| \leq \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}\sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{Y})}$

4) Inégalité de Bienaymé-Chebychev : $\forall\varepsilon > 0$, $\mathrm{P}(|\mathrm{X} - \mathrm{E(X)}| > \varepsilon) \leq \dfrac{\mathrm{V(X)}}{\varepsilon^2}$.

   Application : loi faible des grands nombres (si $(\mathrm{X}_i)_i$ famille de V.A. deux à deux indépendantes de même loi (prenant un nombre fini de valeurs), d'espérance m alors $\forall\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\left|\frac{\mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_n}{n} - m\right| > \varepsilon) = 0$.
   N.B. La notion de *convergence en probabilité* n'est pas écrite dans le programme

5)Fonction génératrice pour une V.A. à valeurs entières

Définition : $\mathrm{G_X}(t) = \mathrm{E}(t^{\mathrm{X}})$.
La fonction génératrice caractérise la loi.
Calcul de la fonction génératrice d'une loi de Bernoulli, d'une loi binomiale.
Application au calcul des moments par les dérivées successives en 1. Exemple sur la loi binomiale et en exercices.
Propriété : si X et Y sont indépendantes, on a $\mathrm{G_{X+Y}}(t) = \mathrm{G_X}(t)\mathrm{G_Y}(t)$. Application : stabilité des lois binomiales par somme dans le cas d'indépendance.

Questions de cours :

1) Si $\mathrm{X} \sim \mathcal{B}(n,p)$, $\mathrm{Y} \sim \mathcal{B}(m,p)$ et si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ suit la loi $\mathcal{B}(n+m,p)$. (*Démo au choix du colleur par calcul en décomposant* $(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=k)$ *et/ou par utilisation des fonctions génératrices*.
   Application à la loi de la somme de n V.A. mutuellement indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
2) Calcul de l'espérance et de la variance d'une va de loi binomiale. *Au choix du colleur par calcul direct de* $\mathrm{E(X)}$ *et* $\mathrm{E(X(X-1))}$ *en utilisant la définition de l'espérance et le théorème de transfert ; et/ou en utilisant une somme de V.A. indépendantes toutes de loi* $\mathcal{B}(p)$ *; et/ou par utilisation des fonctions génératrices et de leurs dérivées en* 1.
3) formule sur $\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i\right)$
   (on a développé $\mathrm{cov}(\mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_n, \mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_n)$ en utilisant la bilinéarité de cov).
4) *Exo* : on munit le groupe $\mathcal{S}_n$ de l'équiprobabilité. On note pour $\sigma \in \mathrm{S}_n$, $\mathrm{X}(\sigma)$ le nombre de points fixes de la permutation σ.
   (a) Quel est le nombre moyen de points fixes d'une permutation choisie au hasard ? *(On a introduit pour* $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{X}_i = 1_{\{\sigma\in\mathcal{S}_n, \sigma(i)=i\}}$*)*
   (b) Que vaut $\mathrm{V(X)}$?
   (c) On choisit une permutation de $[\![1,n]\!]$ au hasard, justifier que la probabilité que le nombre de points fixes soit inférieur ou égal à 2 vaut au moins $3/4$.
   (d) Que dire de la probabilité de l'événement "la permutation choisie a un maximum de 3 points fixes" ?
5) (a) Inégalité de Markov (énoncé et démonstration)
   (b) Application à l'inégalité de Bienaymé-Chebychev (énoncé et démo)
   (c) Application à la loi faible des grands nombres (énoncé et démo).
6) Si X est une variance aléatoire telle que $\mathrm{X}(\Omega) \subset [\![0,\mathrm{N}]\!]$ (où $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$), établir $\mathrm{E(X)} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}(\mathrm{X} \geq k)$
7) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,\mathrm{N}]\!]$, on définit la fonction génératrice par $\mathrm{G_X}(t) = \mathrm{E}(t^{\mathrm{X}})$.
   Expression de $\mathrm{G_X}(t)$, calcul de $\mathrm{E(X)}$ et $\mathrm{E(X(X-1))}$.
   Si X et Y sont indépendantes, $\mathrm{G_{X+Y}} = \mathrm{G_X G_Y}$

Lundi 21 mai férié : prévoir de décaler les colles
Prévisions : Espaces euclidiens