Pas de COLLE la semaine du 27 mai - Liste de Questions de Cours pour l'interro de cours du 29/05

1. (a) Démontrer que $< \mathrm{P}, \mathrm{Q} >= \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$
   (b) Démontrer que $< \mathrm{A}, \mathrm{B} >= \mathrm{tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B})$ définit un produit scalaire sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et expression de $< \mathrm{A}, \mathrm{B} >$ à l'aide des coefficients de A et B.
2. Si $<, >$ produit scalaire sur E et $\|.\|$ norme euclidienne associée, u, v, x_i $(i = 1..n)$ des vecteurs de E
   (a) développer $\|u + v\|^2$, $\|u - v\|^2$ et retrouver les formules de polarisation et l'égalité du parallélogramme.
   (b) Développer (par bilinéarité) $\|x_1 + \cdots + x_n\|^2$; en déduire la relation de Pythagore lorsque $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille orthogonale.
3. Toute famille orthogonale de E ne contenant pas le vecteur nul est une famille libre de E.
4. Savoir démontrer qu'une norme est euclidienne (exemple du cours : On note pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{N}(u) = \sqrt{x^2 + 2xy + 4y^2}$. Montrer que N est bien définie sur $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ et montrer que N est une norme euclidienne sur E ou exercice 1.4, même question avec $\mathrm{N}(u) = \sqrt{x^2 - xy + 2y^2}$)
5. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Énoncé précis avec cas d'égalité puis démonstration (y compris étude des cas d'égalité).
   Pour la démonstration, ayant fixé $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ et on considérera la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \|x + ty\|^2$).
6. Si $<, >$ produit scalaire sur E, l'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{< x, x >}$ est une norme sur E. *Corollaire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz*
7. Montrer les points suivants : a) Si A est une partie de E, $\mathrm{A}^\perp$ est un sev de E.
   b) $\mathrm{E}^\perp = \{0\}$.
   c) *Exo* : déterminer $\mathrm{F}^\perp$ si $\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y = 0, x + z + t = 0\}$ (structure classique)
8. Formes linéaires sur un espace euclidien : pour toute forme linéaire g sur E euclidien, il existe un unique vecteur a de E telle que $g = \varphi_a$ où on a noté $\varphi_a : x \mapsto < x, a >$.
9. Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une B.O.N.
   (a) Les coordonnées dans la B.O.N. $\mathcal{B}$ d'un vecteur x sont les $(< x, e_i >)_i$;
   (b) expression du produit scalaire $< x, y >$ à l'aide des colonnes X et Y des coordonnées de x et de y dans la B.O.N. $\mathcal{B}$. *On écrira d'abord le résultat, puis on démontrera.*
   (c) Si $\mathcal{B}'$ est une famille de n vecteurs et $\mathrm{P} = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer le coefficient $[\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}]_{i,j}$ en fonction des colonnes de P. En déduire l'équivalence $\left(\mathcal{B}' \text{ est une B.O.N. de E} \iff \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{P} = \mathrm{I}_n\right)$
10. Si F est un sev de dimension fini de E préhilbertien, alors $\mathrm{F}^\perp$ est un supplémentaire orthogonal de E.
    On utilisera, si $\dim \mathrm{F} \geq 1$*, une* B.O.N *de* F $(u_1, \ldots, u_p)$.
    En déduire l'expression de la projection orthogonale de $x \in \mathrm{E}$ sur F.
11. Si p est une projection orthogonale, $\forall x \in \mathrm{E}, \|p(x)\| \leq \|x\|$
12. Soit $(\mathrm{E}, <, >)$ un ev préhilbertien et a un vecteur non nul de E. Montrer que $\mathrm{H} = a^\perp$ est un hyperplan et donner l'expression de la projection orthogonale sur H.
13. $\mathrm{E} = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< f, g >= \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} fg$. *Inutile de redémontrer que cela définit bien un produit scalaire*. On note $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$. Déterminer la projection orthogonale de Id sur F.

Notes aux colleurs : pas de colle de MATH cette semaine. Reprise des colles la semaine du 3 juin sur le bilinéaire.