Programme de colle semaine 30 - semaine du 3 juin

Le cours doit être parfaitement su.

Espaces euclidiens

A) Produit scalaire

1. Définition d'un produit scalaire, exemples : produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$, produit scalaire intégral dans $\mathcal{C}([a,b])$ *(Le chapitre Intégration n'ayant pas encore été fait, on a admis la propriété : si f continue et de signe constant sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]} f = 0 \implies \forall t \in [a,b], f(t) = 0$)*, quelques produits scalaires dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
   Définition d'une norme sur un ev.
2. Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Norme issue d'un produit scalaire (norme euclidienne). Identité du parallélogramme, formules de polarisation.
3. Notion d'orthogonalité, d'angle non orienté de vecteurs . Orthogonal d'une partie, propriété : $\mathrm{A}^\perp$ est un sev de E, $(\mathrm{Vect}\ (\mathcal{F}))^\perp = \mathcal{F}^\perp$. Si a est non nul, $(\mathrm{Vect}\ (a))^\perp$ est un hyperplan.
   Famille de vecteurs orthogonale, orthonormale. Liberté de telles familles. Relation de Pythagore.

B) Espaces euclidiens

1. Définition d'un espace euclidien. Existence de bases orthonormales (B.O.N.) dans tout espace euclidien. Toute famille orthonormale peut se compléter en une B.O.N. Expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale et du produit scalaire de deux vecteurs. Expression matricielle $\mathrm{X}^\top \mathrm{Y}$.
2. Les matrices de passage entre deux B.O.N. sont les matrices vérifiant $\mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$ (matrices orthogonales d'ordre n). Propriété : $\mathrm{O}(n)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. *N.B. Le groupe des automorphismes orthogonaux ou isométries vectorielles de* E *et leurs propriétés ne sont plus au programme de 1ère année.*
3. Supplémentaire orthogonal. Si F est un sev de dimension finie d'un ev E préhilbertien, existence et unicité d'un supplémentaire de F orthogonal à F, on le note $\mathrm{F}^\perp$. Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ est une B.O.N de F, la projection orthogonale de $x \in \mathrm{E}$ sur F est $p_\mathrm{F}(x) = \sum_{i=1}^m < x, \varepsilon_i > \varepsilon_i$.
   Lorsque E est euclidien, $\dim \mathrm{F}^\perp$ et égalité $(\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}$.
4. Projecteurs orthogonaux. Caractérisation d'un projecteur orthogonal par $y = p_\mathrm{F}(x) \iff y \in \mathrm{F}$ et $(x - y) \in \mathrm{F}^\perp$. Expression d'une projection orthogonale sur F quand une B.O.N. de F est connue. Inégalité de Bessel.
   Symétries orthogonales, réflexion = symétrie par rapport à un hyperplan.
5. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, en notant pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ $\mathrm{F}_k = \mathrm{Vect}\ (e_1, \dots, e_k)$ et p_k la projection orthogonale sur F_k, la famille définie par :
   $\varepsilon_1 = e_1 / \|e_1\|$ et $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\varepsilon_k = (e_k - p_{k-1}(e_k)) / \|e_k - p_{k-1}(e_k)\|$
   vérifie : pour tout k, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ est une B.O.N. de F_k avec $\langle e_k, \varepsilon_k \rangle > 0$. En procédant par étapes successives, on profite de la B.O.N de F_{k-1} pour le calcul de $p_{k-1}(e_k)$.
6. Définition de la distance d'un vecteur x à une partie A. Théorème de la projection orthogonale : la distance d'un vecteur x à un sev F de dimension finie est atteinte (c'est un $\min$) en un unique point : le projeté orthogonal de x sur F.

Questions de cours :

1. Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une **B.O.N.** Les coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur x sont les $(< x, e_i >)_i$; expression du produit scalaire $< x, y >$ à l'aide des colonnes X et Y des coordonnées de x et de y dans la B.O.N. $\mathcal{B}$.
   Application : Si $\mathcal{B}'$ est une famille de n vecteurs et $\mathrm{P} = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a
   $$\mathcal{B}' \text{ est une B.O.N. de E} \Longleftrightarrow \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{P} = \mathrm{I}_n$$
2. Si $a \neq 0$. Justifier que $\mathrm{H} = \{a\}^{\perp}$ est un hyperplan de E. Expression d'une projection orthogonale sur H, de la réflexion par rapport à H et de la distance d'un vecteur x à H.
3. *Exo* : orthonormaliser la famille de $\mathbb{R}^3$ suivante : $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (1, 0, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
4. Théorème de la projection orthogonale : distance d'un vecteur à un sev de dimension finie (on exigera un dessin) avant la démonstration.
5. *Exo* : déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t - a\sqrt{t} - b)^2 \mathrm{d}t$.
   réponse : min atteint en $a = 6/5$, $b = -3/10$ et la valeur du min est 1/300.

   Aucun exercice cette semaine sur le déterminant - seulement les questions de cours ou exos de cours suivants :
6. Savoir les définitions suivantes du cours ou les formules (sans démonstration). Exemple :
   — expression de $\det(\mathrm{A})$ en fonction des $(a_{i,j})$
   — formule de changement de bases entre $\det_b(\mathcal{F})$ et $\det_{b'}(\mathcal{F})$ si b et b' sont deux bases de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E,
   — Caractérisation des bases à l'aide du déterminant
   — formule de développement par rapport à une colonne (ou une ligne),
7. *Exo* Calculer $\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$
   Indication : $\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \ldots + \mathrm{C}_n$
8. *Exo* Calcul $\mathrm{D}_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & (0) \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$. (Relation entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2} grâce à un développement par rapport à la première colonne).

N.B. le planning des colles reprend bien sur la colonne correspondant à la semaine 30 du colloscope (semaine du 3 juin).

PRÉVISIONS : Déterminant