LMB *MPSI2*

Programme de colle semaine 31 - 10 juin

Le cours doit être parfaitement su.

Groupe symétrique d'ordre n

Groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$. Cycles, transpositions. Décomposition d'une permutation en cycles de supports disjoints, en produit de transpositions. Signature : définition, signature d'une transposition, la signature est un morphisme de groupes de $\mathcal{S}_n$ dans $\{-1, +1\}$ (admis), groupe alterné.

Déterminants

1. Application n-linéaire, application n-linéaire alternée, Propriété d'anti-symétrie.
   Formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n.
2. Définition du déterminant de n vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ de E, notée $\det_{\mathcal{B}}$. Propriétés, caractérisation des bases, changement de bases.
3. Déterminant d'une matrice carrée A. Expression en fonction des coefficients.
   Propriétés : caractérisation des matrices inversibles et si $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ $\det(\mathrm{A}^{-1}) = 1/\det(\mathrm{A})$ $\det(\mathrm{A}^\top) = \det \mathrm{A}$.
4. Déterminant d'un endomorphisme. Définition, exemples : déterminant de l'identité, d'une symétrie. Propriétés : $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$, $\det(g \circ f) = \det g \det f$, application aux déterminants d'un produit de matrices carrées. Caractérisation des automorphismes.

Calcul de déterminant : on se ramène au calcul de déterminant d'une matrice carrée

- Opérations sur les lignes et les colonnes.
- Déterminant d'une matrice triangulaire, d'une matrice triangulaire par blocs.
- Développement d'un déterminant par rapport à une ligne et une colonne. Relation $\mathrm{A}\mathrm{com}^\top(\mathrm{A}) = \mathrm{com}^\top(\mathrm{A})\mathrm{A} = (\det \mathrm{A})\mathrm{I}_n$, application aux matrices inversibles. Exemple pour $n = 2$.

Applications :

1. Systèmes linéaires, formules de Cramer.
2. Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Bases directes et indirectes. Automorphismes directs et indirects.
3. Interprétation des déterminants en terme de volume.
4. Résultats sur le rang : une matrice (rectangle) est de rang r si et seulement si [il existe au moins un déterminant extrait de A, d'ordre r, non nul et si tous les déterminants extraits de A d'ordre $r + 1$ sont nuls].
5. Complément : $\mathrm{A} \mapsto \det \mathrm{A}$ fonction polynomiale en les n^2 variables ; dérivation de $x \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1(x), ..., u_n(x))$ où $u_1, ..., u_n$ sont n applications d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$ dérivables.

N.B. Le déterminant de VanderMonde a été traité en exercice et le résultat doit être connu des étudiants.

Questions de cours ou Exercices :

1. Savoir donner n'importe quelle formule du cours (sans démonstration). Exemple :
   - expression de $\det(\mathrm{A})$ en fonction des $(a_{i,j})$
   - formule de changement de bases entre $\det_b(\mathcal{F})$ et $\det_{b'}(\mathcal{F})$ si b et b' sont deux bases de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E,

- formules de développement par rapport à une colonne,
- Pour $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, $\lambda \in \mathrm{K}$ $\det(\mathrm{AB}) = ...$ $\qquad \det(\lambda \mathrm{A}) = ...$)
- Si $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\det(g \circ f) = ...$ $\qquad \det(\lambda f) = ...$
- formule reliant A, $\mathrm{com}(\mathrm{A})$ et $\det(\mathrm{A})$ et formule sur A^{-1} lorsque $\det \mathrm{A} \neq 0$. En particulier, expliciter les coefficients A^{-1} si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$.
- Formules de Cramer et application à un système linéaire 2 équations 2 inconnues

2. Déterminant d'une symétrie vectorielle.
3. Exo : Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$
   (1) Si A est à coefficients entiers, alors $\det \mathrm{A} \in \mathbb{Z}$.
   (2) Si A est à coefficients entiers et inversible, montrer que A^{-1} est à coefficients entiers si et seulement si $\det \mathrm{A} = \pm 1$.
4. Exo : Déterminant de Vandermonde (par récurrence en introduisant le polynôme $\mathrm{P}_n = \mathrm{V}(x_0, ..., x_n, \mathrm{X})$).
   Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice de Vandermonde.
5. Exo : Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ n scalaires et λ un scalaire. Déterminer l'expression de

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & & & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

6. Exo : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ ($\dim \mathrm{E} = n$). On pose $\chi(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_d - f)$.
   (1) Montrer que χ est un polynôme en λ, de degré n, unitaire. Que vaut son coefficient devant λ^{n-1}, son terme constant ?
   (2) Si $\lambda \in \mathrm{K}$, justifier que $\chi(\lambda) = 0 \iff \ker(f - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0_{\mathrm{E}}\}$

   Questions de cours sur l'uniforme continuité
7. Donner la définition de $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur D.
   Justifier qu'une fonction lipschitzienne sur un intervalle I est uniformément continue sur I.
8. Théorème de Heine : énoncé et démonstration (par l'absurde).
9. Exo : Soit f définie sur $[0, 1]$ et $\mathrm{S}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$.
   (1) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$, démontrer que $\mathrm{S}_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$
   (2) On suppose que f est continue sur $[0, 1]$, démontrer que $(\mathrm{S}_n)_n$ tend vers 0.

   Cette semaine aucun exercice ne portera sur l'uniforme continuité (juste les questions de cours ci-dessus). Ce sera au prochain (et dernier) programme de colle, avec l'intégration.

PRÉVISIONS : Uniforme continuité. Construction de l'intégrale (fonctions continues par morceaux sur les segments).