Programme de colle - semaine 32 - 17 juin

Le cours doit être parfaitement su.

Intégration sur un segment

Uniforme continuité

Définition, les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues, théorème de Heine.

Intégrale d'une fonction réelle en escalier

1. Définition
2. Propriétés des intégrales des fonctions en escaliers : relation de Chasles, linéarité, croissance

Intégrale d'une fonction réelle continue par morceaux

1. Théorème : pour f à valeurs réelles et continue par morceaux, les quantités $\mathrm{I}_-(f) = \sup\left\{ \int_{[a,b]} g \ / \ g \text{ en escalier et } g \leq f \right\}$ et $\mathrm{I}_+(f) = \inf\left\{ \int_{[a,b]} h \ / \ h \text{ en escalier et } f \leq h \right\}$ existent et sont égales.
   Définition : leur valeur commune est l'intégrale de f sur $[a,b]$, notée $\int_{[a,b]} f$. Extension au cas où les bornes sont dans un ordre quelconque et notation : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$
2. Propriétés : Relation de Chasles, linéarité, positivité et croissance , majoration (inégalité triangulaire pour les intégrales).
3. Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski.
4. si f est positive ou nulle et si $f(x_0) > 0$ et f continue en x_0, l'intégrale est strictement positive. Corollaire : une fonction continue sur $[a,b]$ de signe constant et d'intégrale nulle est nulle sur $[a,b]$. Lorsque f et g sont continues cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et dans l'inégalité de Minkowski.
5. Sommes de Riemann. Théorème : $\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_{[a,b]} f$. Démo : 1er cas : si f est lipschitzienne convergence en $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, 2ème cas : si f est continue sur $[a,b]$.
   En pratique, on se ramène au segment $[0,1]$.
6. Intégration et dérivation
   (a) Propriétés d'une fonction définie par une intégrale qui dépend de la borne supérieure, à savoir $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ où f est continue par morceaux sur l'intervalle I et $a \in \mathrm{I}$.
      — F est continue sur I.
      — F est dérivable en tout point $x_0 \in \mathrm{I}$ où f est continue et alors $\mathrm{F}'(x_0) = f(x_0)$.
   (b) Avec les notations précédentes, si f est continue sur l'intervalle I, f possède des primitives, et F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
      Théorème fondamental : si f continue sur l'intervalle I et $a, b \in \mathrm{I}$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a)$ où G est n'importe quelle primitive de f sur I.
   (c) Formule de Taylor avec reste intégral et démonstration de son corollaire : l'inégalité de Taylor-Lagrange. Bilan sur toutes les formules de Taylor (Taylor avec reste intégral, de Taylor-Lagrange et Taylor-Young).
   (d) Compléments :
      — démonstration du théorème de primitivation des DLs admis en début d'année.
      — Extension : intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$ à **valeurs complexes**. Définition, propriétés.

QUESTIONS DE COURS :

1. Si f cpm et positive sur $[a,b]$ avec $f(x_0)>0$ et f continue en x_0 alors $\int_{[a,b]} f>0$.
   Conséquence : Si f est continue sur $[a,b]$ de signe constant et d'intégrale nulle alors f est nulle sur $[a,b]$.
2. Théorème sur les sommes de Riemann (méthode des rectangles). Démo à demander soit dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ (ou lipschitzienne), avec la vitesse de convergence en $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, soit dans le cas continue sur $[a,b]$.
3. Notant $\mathrm{F}: x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ où f est continue en $x_0 \in \mathrm{I}$ et $a \in \mathrm{I}$, alors F est dérivable en x_0 et $\mathrm{F}'(x_0)=f(x_0)$
4. *Exo* (fait en cours) : $\mathrm{H}(x)=\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, $\mathrm{G}(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$.
   (a) Domaine de définition de H. Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $\mathrm{H}'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   (b) Domaine de définition de G. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ (et sur $]-\infty,0[$). Expression de $\mathrm{G}'(x)$ pour $x>0$ (et $x<0$).
   (c) Justifier que G se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour $f=\exp$. Établir :
$$\forall x\geq 0, \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\leq e^x\leq \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+e^x\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$
6. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x pour $t\mapsto \ln(1+t)$ à l'ordre n et sin à l'ordre $2n+2$.
7. *Exo* : Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[\,a\,;b\,]$. On note pour $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle\int_a^b f\left(t\right)\sin\left(nt\right)\mathrm{d}t$
   (a) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que $\mathrm{I}_n=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ grâce à une IPP.
   (b) Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, montrer qu'on a encore $\lim \mathrm{I}_n=0$.
   On a vérifié que le résultat est vrai pour f constante, puis en escalier, puis utilisé l'approximation uniforme de f par les fonctions en escaliers.

Ce sera la dernière semaine de colle. **Merci à tous les élèves et à tous les colleurs pour votre travail !**

Message aux élèves - Programme pour les deux dernières semaines de classe : fin du cours Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles. Puis Fonctions de 2 variables et enfin Familles sommables.